الكلية متعددة التخصصات تازة

FACULTÉ POLYDISCIPLINAIRE DE TAZA

جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس

UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES

Cours Calcul différentiel 4

Filière : SMA, S5

Prof. Yazough Chihab

Année universitaire : 2025/2026

Table des matières

Chapitre 1

Applications différentiables, différentielle

1.1 Définitions

Définition 1.1.1. *(Application différentiable). Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une application. Soit $x \in E$, on dit que f est différentiable en x s'il existe une application L linéaire continue de E dans F telle que*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0.$$

Remarque 1.1.1. *Une propriété immédiate mais qui peut être utile : si on change la norme sur E en une norme équivalente et si on change la norme sur F en une norme équivalente, cela ne change pas la notion de différentiabilité. Autrement dit une fonction différentiable en un point pour un choix de norme sur E et sur F le sera pour tout choix de normes équivalentes. De même une fonction non différentiable en x restera non différentiable si on change la norme sur E en une norme équivalente et la norme sur F en une norme équivalente.*

Proposition 1.1.1. *Avec les notations de la définition ci-dessus, si l'application L existe, elle est unique.*

Dém

Supposons qu'il existe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ et $L_1 \in \mathcal{L}(E, F)$ telles que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0 \text{ et } \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L_1(h)}{\|h\|} = 0.$$

Alors

$$\lim_{h \to 0} \frac{L_1(h) - L(h)}{\|h\|} = 0$$

Prenons $h = t\omega$ avec $t > 0$ et $\|\omega\| = 1, \omega$ fixé, et faisons tendre t vers 0 . On a

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{L_1(t\omega) - L(t\omega)}{t} = \lim_{t \to 0} L_1(\omega) - L(\omega) = L_1(\omega) - L(\omega)$$

Donc L et L_1 sont égales sur le sphère unité de E. Par linéarité, il suit que $L_1 = L$.

Définition 1.1.2. *Avec les notations de la définition 1.1, lorsqu'elle existe, l'application L s'appelle la différentielle de f en x, ou encore l'application tangente à f au point x. On la note $Df(x)$.*
Proposition 1.1.2. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, $x \in E$ et $f : E \to F$ une application différentiable en x, alors f est continue en x.*

Preuve. On sait qu'il existe $L \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} = 0$$

ce qui s'écrit encore de la façon suivante : il existe une application $\varepsilon : E \to F$ satisfaisant

$$\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$$

et telle que pour tout $h \in E, h \neq 0$, on ait

$$f(x+h) - f(x) = L(h) + \|h\|\varepsilon(h).$$

Il suit par linéarité de L que

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x),$$

i.e. f est continue en x.
Définition 1.1.3. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E, et f une application de Ω dans F.*

1. *On dira que f est différentiable sur Ω si elle l'est en tout point x de Ω.*
2. *Si f est différentiable sur Ω, on appelle application différentielle (ou simplement différentielle) de f l'application Df qui à $x \in \Omega$ associe $Df(x)$ l'application tangente à f au point x. La différentielle Df est une application de Ω dans $\mathcal{L}(E, F)$.*
3. *On dira que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si elle est différentiable sur Ω et si Df est continue sur Ω, c'est-à-dire*

$$\forall x \in \Omega, \quad \lim_{y \to 0} \|Df(x+y) - Df(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0$$

On rappelle que cette norme s'écrit

$$\begin{aligned} \|Df(x+y) - Df(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} &= \sup_{h \in E, h \neq 0} \frac{\|Df(x+y)(h) - Df(x)(h)\|_F}{\|h\|_E} \\ &= \sup_{h \in E, \|h\|_E = 1} \|Df(x+y)(h) - Df(x)(h)\|_F \end{aligned}$$

Remarque 1.1.2. *Attention ! L'application Df n'a aucune raison d'être linéaire (sauf si f est bilinéaire, nous verrons cela plus tard), c'est sa valeur en chaque point x qui est une application linéaire continue.*
Proposition 1.1.3. *(Opérations sur les fonctions différentiables).*

1. *Toute combinaison linéaire de fonctions différentiables est différentiable et*

$$D(\lambda f + \mu g)(x) = \lambda Df(x) + \mu Dg(x).$$

2. *Composition : soit E, F et G trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}, U$ un ouvert de E, V un ouvert de $F, x \in U$. Soit $f : U \to F$ une application telle que $f(U) \subset V$, soit $g : V \to G$. Si f est différentiable en x et g est différentiable en $f(x)$, alors $g \circ f$ est différentiable en x et on a*

$$D(g \circ f)(x)(h) = Dg(f(x))(Df(x)(h)),$$

autrement dit

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x).$$

Et il suit que si f est différentiable sur U et g sur V alors $g \circ f$ est différentiable sur U.

Preuve

1. Trivial.
2. En utilisant le fait que f est différentiable en x,

$$g \circ f(x+h) = g(f(x) + Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h))$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$. La différentiabilité de g en $f(x)$ nous donne alors

$$\begin{aligned} g \circ f(x+h) =& g(f(x)) + Dg(f(x))(Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h)) \\ &+ \|Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h)\|\tilde{\varepsilon}(Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h)) \\ =& g(f(x)) + Dg(f(x))(Df(x)(h)) + Dg(f(x))(\|h\|\varepsilon(h)) \\ &+ \|Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h)\|\tilde{\varepsilon}(Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h)) \\ =& g(f(x)) + Dg(f(x))(Df(x)(h)) + \|h\|Dg(f(x))(\varepsilon(h)) \\ &+ \|Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h)\|\tilde{\varepsilon}(Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h)), \end{aligned}$$

où $\tilde{\varepsilon}(k) \to 0$ lorsque $k \to 0$. Donc

$$\begin{gathered} \|g \circ f(x+h) - g(f(x)) - Dg(f(x))(Df(x)(h)\| \\ \leq \|h\| \left(\|Dg(f(x))(\varepsilon(h))\| + \left(\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \|\varepsilon(h)\| \right) \|\tilde{\varepsilon}(Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h))\| \right). \end{gathered}$$

Par linéarité et continuité de $Dg(f(x))$, on a

$$Dg(f(x))(\varepsilon(h)) \to 0 \text{ lorsque } h \to 0$$

et comme

$$\tilde{\varepsilon}(Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h)) \to 0 \text{ lorsque } h \to 0$$

il suit que

$$\lim_{h \to 0} \frac{g \circ f(x+h) - g(f(x)) - Dg(f(x))(Df(x)(h)}{\|h\|} = 0$$

Ceci conclut la preuve.

Corollaire 1.1.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}, U$ un ouvert de E et V un ouvert de F. Soit $f : U \to V$ une application bijective. On suppose que f est différentiable en $x \in U$ et que f^{-1} est différentiable en $f(x)$, alors $Df(x)$ est un isomorphisme de E sur F et*

$$D\left(f^{-1}\right)(f(x)) = (Df(x))^{-1}$$

Démonstration

On applique la proposition précédente à $\mathrm{Id}_E = f^{-1} \circ f$ et $\mathrm{Id}_F = f \circ f^{-1}$, en remarquant que

$$D\,\mathrm{Id}_E(x) = \mathrm{Id}_E, D\,\mathrm{Id}_F(f(x)) = \mathrm{Id}_F$$

On va maintenant voir la notion de dérivée directionnelle et son lien avec la différentielle.

Définition 1.1.4. *(Dérivée directionnelle). Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}, \Omega$ un ouvert de E, et f une application de Ω dans F. Soit $x \in E$ et $v \in E, v \neq 0$. On appelle dérivée directionnelle de f en x selon la direction v la dérivée en 0 , si elle existe, de l'application*

$$\phi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(x+tv)$$

on la note

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x)$$

Autrement dit

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

si elle existe. En effet,

$$\phi'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} \textit{ si elle existe}$$

et

$$\frac{\phi(t) - \phi(0)}{t} = \frac{f(x+tv) - f(x)}{t}$$

Lorsqu'une fonction est différentiable, elle admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions et on peut les calculer à l'aide de la différentielle.

Proposition 1.1.4. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}, \Omega$ un ouvert de E, $x \in \Omega$ et f une application de Ω dans F différentiable en x. Alors f admet en x des dérivées directionnelles dans toutes les directions et pour tout $v \in E, v \neq 0$, on a*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = Df(x)(v).$$

Preuve. On sait que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)-Df(x)(h)}{\|h\|} = 0.$$

Soit $v \in E, v \neq 0$, en prenant $h = tv, t \in \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)-Df(x)(tv)}{|t|\|v\|} = 0$$

ce qui équivaut à

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)-Df(x)(tv)}{t} = 0.$$

D'autre part, comme $Df(x)$ est linéaire, $Df(x)(tv) = tDf(x)(v)$. Il suit

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t} = Df(x)(v).$$

Ceci conclut la preuve.
Remarques
Une application peut admettre en un point des dérivées directionnelles dans toutes les directions et pourtant ne pas être différentiable en ce point. On verra des exemples explicites de ce genre de situation en dimension finie.

Voyons quelques exemples de calculs de différentielles.

– $E = F = \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(A) = I + 2A$. On développe $f(A+H)$:

$$f(A+H) = I + 2A + 2H$$

On identifie la partie linéaire en H : on pose $L(H) = 2H$ et on a

$$f(A+H) = f(A) + L(H)$$

Donc en particulier

$$\lim_{H\to 0} \frac{f(A+H)-f(A)-L(H)}{\|H\|} = 0$$

Donc f est différentiable en tout point A de E et $Df(A)(H) = 2H$.

– $E = F = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ munis de la même norme matricielle, $f(A) = A^2$. On développe $f(A+H)$ en n'oubliant pas que le produit matriciel ne commute pas :

$$f(A+H) = (A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2.$$

On identifie la partie linéaire en H : on pose $L(H) = AH + HA$ et on a

$$f(A+H) = f(A) + L(H) + H^2$$

il suit

$$\left\| \frac{f(A+H) - f(A) - L(H)}{\|H\|} \right\| = \left\| \frac{H^2}{\|H\|} \right\| \leq C\|H\|$$

car pour toute norme $\|.\| sur \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ il existe $C > 0$ tel que

$$\|AB\| \leq C\|A\|\|B\| \forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

On a donc

$$\lim_{H\to 0} \frac{f(A+H) - f(A) - L(H)}{\|H\|} = 0$$

f est différentiable en tout point A de E et $Df(A)(H) = AH + HA$.

1.2 Cas des applications linéaires continues

Proposition 1.2.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et $L \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors L est différentiable sur E et pour tout $x \in E$ on a*

$$DL(x) = L$$

Démonstration
C'est un calcul direct

$$L(x+h) = L(x) + L(h) + 0$$

et 0 est bien de la forme $\|h\|\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$.

1.2.1 Cas où $E = \mathbb{R}$

Proposition 1.2.2. *On considère ici le cas où $E = \mathbb{R}$. Soit F un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et f une application définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}$ à valeurs dans F. Soit $x \in U$, f est différentiable en x si et seulement si elle est dérivable en x au sens usuel et dans ce cas, on a*

$$Df(x) : h \mapsto hf'(x)$$

On voit donc que la notion habituelle de dérivabilité pour les fonctions à une variable réelle est exactement la même chose que la différentiabilité. De plus pour ces fonctions la différentielle en un point est l'application de multiplication par la dérivée de f en ce point.

Preuve Supposons que f soit dérivable en x, alors on peut effectuer un développement de Taylor-Lagrange de f à l'ordre 1 en x :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h) \text{ où } \varepsilon \text{ tend vers } 0 \text{ en } 0.$$

On voit que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - hf'(x)}{|h|} = 0$$

et donc f est différentiable en x avec $Df(x)(h) = hf'(x)$.
Supposons maintenant que f soit différentiable en x. Il existe une application $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}, F)$ telle que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{|h|} = 0.$$

Mais $L(h) = hL(1)$ car $h \in \mathbb{R}$ et donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - hL(1)}{|h|} = 0$$

Ceci est équivalent à (encore une fois du fait que $h \in \mathbb{R}$)

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - hL(1)}{h} = 0$$

et on a donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = L(1)$$

Donc f est dérivable en x et $f'(x) = L(1)$.

1.2.2 Cas où $E = \mathbb{R}^n$

On se place dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$ et F est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to F$ une application. Soit $x = (x_1, \ldots, x_n) \in U$. On rappelle la définition des dérivées partielles de f en x .
Définition 1.2.1. *La dérivée partielle de f par rapport à la i-ème variable au point x est la dérivée en 0 , si elle existe, de l'application*

$$t \in \mathbb{R} \mapsto f\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + t, x_{i+1}, \ldots, x_n\right)$$

on la note

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Autrement dit,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+t,x_{i+1},\ldots,x_n) - f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)}{t}$$

si cette limite existe.

On voit donc que la dérivée partielle de f par rapport à la i-ème variable au point x est la dérivée directionnelle de f en x selon le i-ème vecteur de base e_i (où $\{e_1,\ldots,e_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$), i.e.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x).$$

Donc en particulier, si f est différentiable en x,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = Df(x)(e_i) = Df(x)(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0) \text{ (le 1 étant à la i-ème place).}$$

Comme la différentielle de f en x, si elle existe, est linéaire, il suit que nous connaissons sa forme : on développe $h \in \mathbb{R}^n$ sur la base canonique

$$h = h_1 e_1 + \ldots + h_n e_n$$

et on a

$$Df(x)(h) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

Nous venons de montrer la proposition suivante :

Proposition 1.2.3. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n, x \in U, F$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et $f : U \to F$ une application différentiable en x. Alors la différentielle de f en x s'écrit en fonction des dérivées partielles de f en x de la façon suivante*

$$Df(x)(h) = \sum_{i=1}^n h_i Df(x)(e_i) = \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x). \tag{1.1}$$

Ceci nous donne un moyen pratique d'étudier la différentiabilité en un point d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 1.2.4. *Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n, x \in U, F$ un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et $f : U \to F$ une application. Alors f est différentiable en x si et seulement si*

1. *les dérivées partielles de f en x existent par rapport à toutes les variables ;*
2. *de plus*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)}{\|h\|} = 0.$$

1.2.3 Cas où $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^p$, matrices Jacobiennes

Soit $E = \mathbb{R}^n, F = \mathbb{R}^p, \Omega$ un ouvert de $E, x \in \Omega$ et $f : \Omega \to F$ une application. On note $f_1, \dots, f_p$ les composantes de f. Les dérivées partielles de f en x, si elles existent, sont les vecteurs de $\mathbb{R}^p$ dont les composantes sont les dérivées partielles des composantes de f :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_i} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_i} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_i} \end{pmatrix}.$$

On voit que si f est différentiable en x, on a

$$Df(x)(h) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = J(f)(x) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ h_n \end{pmatrix} \tag{1.2}$$

où $J(f)(x)$ est la matrice Jacobienne de f en x, donnée par (les colonnes correspondent aux variables par rapport auxquelles on dérive et les lignes aux composantes de la fonction)

$$J(f)(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_1} & \frac{\partial f_p}{\partial x_2} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

L'étude de la différentiabilité de la fonction f en x peut donc se faire de la façon suivante :

1. on commence par vérifier que les dérivées partielles en x de $f_1, f_2, \dots, f_p$ existent par rapport à toutes les variables ;
2. on vérifie ensuite que

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x) - (J(f)(x))(h)}{\|h\|} = 0$$

où $(J(f)(x))(h)$ est $J(f)(x)$ appliquée au vecteur colonne h (équation (1.2)).

La proposition suivante permet de ramener, si on le souhaite, l'étude de la différentiabilité de f à celle de ses composantes.

Proposition 1.2.5. *La fonction f est différentiable en x si et seulement si toutes ses composantes le sont.*

Preuve. Supposons que f soit différentiable en x. La i-ème composante de f est donnée par $f_i = \pi_i \circ f$ où

$$\pi_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \pi_i(x_1, \ldots, x_p) = x_i$$

Comme π_i est linéaire (et donc continue car $\mathbb{R}^p$ est de dimension finie), elle est différentiable en tout point, en particulier en $f(x)$. Donc f_i est différentiable en x comme composée de fonctions différentiables.

Supposons maintenant que toutes les composantes de f soient différentiables en x, alors leurs différentielles en x sont données par

$$Df_i(x)(h) = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$

Posons $L(h) = (J(f)(x))(h)$ donné par l'équation (1.2) ; L est bien linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ (et donc aussi continue, car on est en dimension finie). La i-ème composante de $f(x+h) - f(x) - L(h)$ est

$$f_i(x+h) - f_i(x) - \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x) = f_i(x+h) - f_i(x) - Df_i(x)(h)$$

et du fait que toutes les normes sur $\mathbb{R}^p$ sont équivalentes,

$$\|f(x+h) - f(x) - L(h)\| \leq C \sum_{i=1}^{p} |f_i(x+h) - f_i(x) - Df_i(x)(h)|,$$

où $C > 0$ est indépendante de x et f. Il suit que

$$\left\| \frac{f(x+h) - f(x) - L(h)}{\|h\|} \right\| \leq C \sum_{i=1}^{p} \frac{|f_i(x+h) - f_i(x) - Df_i(x)(h)|}{\|h\|}$$

et chaque terme de la somme tend vers 0 lorsque h tend vers 0 du fait que les f_i sont toutes différentiables en x.

1.2.4 Cas des applications multilinéaires continues

Dans ce paragraphe, nous allons travailler avec des espaces produits. Si E_1, E_2 sont des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, nous munirons $E_1 \times E_2$ d'une des normes équivalentes suivantes

$$\begin{aligned} \|(x,y)\|_p &= \left(\|x\|_{E_1}^p + \|y\|_{E_2}^p\right)^{1/p}, p \in [1, +\infty[\\ \|(x,y)\|_\infty &= \max\left(\|x\|_{E_1}, \|y\|_{E_2}\right) \end{aligned}$$

De même, si $E_1, E_2, \ldots, E_n$ sont des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, nous munirons $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ d'une des normes équivalentes suivantes

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_p = \left(\|x_1\|_{E_1}^p + \|x_2\|_{E_2}^p + \ldots + \|x_n\|_{E_n}^p \|\right)^{1/p}, p \in [1, +\infty[,$$
$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\left(\|x_1\|_{E_1}, \|x_2\|_{E_2}, \ldots, \|x_n\|_{E_n}\right)$$

Définition 1.2.2. *(Application bilinéaire). Soit E_1, E_2, F des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$. Une application $f : E_1 \times E_2 \to F$ est dite bilinéaire si elle est linéaire par rapport à chacun de ses arguments, i.e. si pour tout $y \in E_2$, l'application*

$$\phi_1 : x \in E_1 \mapsto f(x, y) \tag{1.3}$$

est linéaire de E_1 dans F et pour tout $x \in E_1$, l'application

$$\phi_2 : y \in E_2 \mapsto f(x, y) \tag{1.4}$$

est linéaire de E_2 dans F.

On a pour les applications bilinéaires un résultat de continuité analogue à celui des applications linéaires.

Théorème 1.2.1. *Avec les notations de la définition ci-dessus, une application bilinéaire f est continue si et seulement si*

$$\exists C > 0 \text{ t.q. } \forall (x, y) \in E_1 \times E_2, \|f(x, y)\|_F \leq C\|x\|_{E_1}\|y\|_{E_2}. \tag{1.5}$$

Preuve. C'est évident si on remarque que $f : E_1 \times E_2 \to F$ est bilinéaire continue si et seulement si

$$\psi : x \in E_1 \mapsto (y \in E_2 \mapsto f(x, y))$$

est linéaire continue de E_1 dans $\mathcal{L}_(E_2, F\big)$.

Définition 1.2.3. *(Application n-multilinéaire). Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n, F$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$. Une application $f : E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \to F$ est dite n-multilinéaire si elle est linéaire par rapport à chacun de ses arguments, i.e. pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pour tout $x_1 \in E_1, \ldots, x_{i-1} \in E_{i-1}, x_{i+1} \in E_{i+1}, \ldots, x_n \in E_n$, l'application*

$$\phi_i : x_i \in E_i \mapsto f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) \tag{1.6}$$

est linéaire de E_i dans F.

On a pour ces applications un résultat de continuité similaire qui se démontre comme le cas bilinéaire mais avec une succession de n applications au lieu de 2.

Proposition 1.2.6. *Avec les notations de la définition ci-dessus, une application n multilinéaire f est continue si et seulement si il existe $C > 0$ tel que*

$$\|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F \leq C \|x_1\|_{E_1} \ldots \|x_n\|_{E_n}, \forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n \tag{1.7}$$

On peut montrer facilement qu'une application n-multilinéaire continue est différentiable et sa différentielle se calcule très simplement. On commence par traiter le cas bilinéaire.

Proposition 1.2.7. *Soit E_1, E_2, F des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et $f : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire continue. Alors f est différentiable sur $E_1 \times E_2$ et*

$$Df(x,y)(h,k) = f(x,k) + f(h,y)$$

Preuve. On développe $f((x,y)+(h,k))$:

$$\begin{aligned} f((x,y)+(h,k)) &= f(x+h, y+k) \\ &= f(x,y) + f(x,k) + f(h,y) + f(h,k). \end{aligned}$$

L'expression $f(x,k) + f(h,y)$ est linéaire continue en (h,k) pour chaque (x,y), on pose donc $L(h,k) = f(x,k) + f(h,y)$. On a alors

$$\begin{aligned} \left\| \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y) - L(h,k)}{\|(h,k)\|_2} \right\| &= \left\| \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|_2} \right\| \\ &\leq C \frac{\|h\| \|k\|}{\|(h,k)\|_2} \leq C \frac{\|(h,k)\|_2^2}{\|(h,k)\|_2} = C\|(h,k)\|_2 \end{aligned}$$

On a donc

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y) - L(h,k)}{\|(h,k)\|_2} = 0$$

ce qui conclut la preuve.
On a un résultat similaire dans le cas multi-linéaire. La preuve est laissée en exercice.
Proposition 1.2.8. *Soit $E_1, E_2, \ldots, E_n, F$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et*

$$f : E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \to F$$

une application n-multilinéaire continue, alors f est différentiable sur $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ et $Df(x_1, x_2, \ldots, x_n)(h_1, h_2, \ldots, h_n) = f(h_1, x_2, \ldots, x_n) + f(x_1, h_2, \ldots, x_n) + \ldots + f(x_1, x_2, \ldots, h_n)$ *ce qu'on peut aussi écrire*

$$Df(x_1, x_2, \ldots, x_n)(h_1, h_2, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$$

1.2.5 Applications à valeurs dans un produit

Proposition 1.2.9. *Soit $E, F_1, \ldots, F_n$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E, $x \in \Omega$ et*

$$f : E \to F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$$

une application. On notera $f_1, f_2, \ldots, f_n$ les composantes de f, i.e. chaque f_i est une application de E dans F_i. Alors f est différentiable en x si et seulement si chacune des f_i est différentiable en x, auquel cas on a

$$Df(x)(h) = (Df_1(x)(h), Df_2(x)(h), \ldots, Df_n(x)(h))$$

Preuve. Pour montrer ce résultat, on prend la norme $\|.\|_1$ sur $F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$ pour simplifier les calculs. Supposons que les f_i sont toutes différentiables en x, on pose

$$L(h) = (Df_1(x)(h), Df_2(x)(h), \ldots, Df_n(x)(h))$$

On a

$$\frac{\|f(x+h) - f(x) - L(h)\|_1}{\|h\|} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\|f(x+h) - f(x) - L(h)\|_1}{\|h\|}$$

et ceci tend vers 0 quand $h \to 0$. La réciproque est tout aussi simple. On note π_i la projection de $F_1 \times F_2 \times \ldots \times F_n$ sur F_i, on a

$$f_i = \pi_i \circ f$$

L'application π_i est linéaire continue donc différentiable et $D\pi_i(x) = \pi_i$. Si on suppose que f est différentiable en x, il suit que f_i l'est aussi et de plus

$$Df_i(x) = (D\pi_i(f(x))) \circ Df(x) = \pi_i \circ Df(x)$$

On a donc bien

$$Df(x)(h) = (Df_1(x)(h), Df_2(x)(h), \ldots, Df_n(x)(h))$$

1.2.6 Applications à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou une algèbre normée sur $\mathbb{R}$

Définition 1.2.4. *(Algèbre normée sur $\mathbb{R}$). Un espace vectoriel normé ($E, \|.\|)sur\mathbb{R}$ est appelé une $\mathbb{R}$-algèbre normée s'il est de plus muni d'une loi interne de multiplication telle que*

$$\begin{gathered} \|xy\| \leq \|x\|\|y\|, \forall x, y \in E \\ (xy)z = x(yz), \forall x, y, z \in E \\ (x+y)z = xz + yz, x(y+z) = xy + xz, \forall x, y, z \in E \\ (\alpha x)y = x(\alpha y) = \alpha xy, \forall \alpha \in \mathbb{K}, x, y \in E \end{gathered} \tag{1.8}$$

Une $\mathbb{R}$-algèbre normée est dite :

- *commutative si $xy = yx$ pour tout $x, y \in E$;*
- *unitaire s'il existe un élément $x \in E$ tel que $xy = yx = y$ pour tout $y \in E$.*

Exemples 1.2.1. – *$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des $\mathbb{R}$-algèbre normées commutatives et unitaires.*
- *$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ muni d'une norme vérifiant la propriété d'algèbre est une $\mathbb{R}$-algèbre normée unitaire et non commutative.*
- *I un intervalle compact de $\mathbb{R}, \mathcal{C}(I)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre normée unitaire et commutative.*

– *$\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et tendant vers 0 à l'infini est une $\mathbb{R}$-algèbre normée commutative et non unitaire.*

Proposition 1.2.10. *Soit A une $\mathbb{R}$-algèbre normée, E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}, \Omega$ un ouvert de $E, x \in \Omega$ et f et g deux applications de Ω dans A. On suppose que f et g sont différentiables en x, alors fg est différentiable en x et*

$$D(fg)(x)(h) = (Df(x)(h))g(x) + f(x)Dg(x)(h)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h), \\ g(x+h) &= g(x) + Dg(x)(h) + \|h\|\varepsilon_2(h), \end{aligned}$$

où $\varepsilon_1(h)$ et $\varepsilon_2(h)$ tendent vers 0 lorsque $h \to 0$. Il suit que

$$\begin{aligned} f(x+h)g(x+h) =& \left(f(x) + Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)\right)\left(g(x) + Dg(x)(h) + \|h\|\varepsilon_2(h)\right) \\ =& f(x)g(x) + (Df(x)(h))g(x) + f(x)Df(x)(h) \\ & + Df(x)(h)Dg(x)(h) + \|h\|f(x)\varepsilon_2(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)g(x) \\ & + \|h\|^2\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h) \end{aligned}$$

La propriété d'algèbre ainsi que le fait que $Df(x)$ et $Dg(x)$ sont linéaires continues, impliquent que

$$\begin{aligned} & \left\|Df(x)(h)Dg(x)(h) + \|h\|f(x)\varepsilon_2(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)g(x) + \|h\|^2\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h)\right\| \\ & \leq C\|h\|^2 + \|h\|\left(\|f(x)\|\,\|\varepsilon_2(h)\| + \|\varepsilon_1(h)\|\,\|g(x)\|\right) + \|h\|^2\,\|\varepsilon_1(h)\|\,\|\varepsilon_2(h)\| \end{aligned}$$

et donc que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|Df(x)(h)Dg(x)(h) + \|h\|f(x)\varepsilon_2(h) + \|h\|\varepsilon_1(h)g(x) + \|h\|^2\varepsilon_1(h)\varepsilon_2(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Proposition 1.2.11. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}, \Omega$ un ouvert de $E, x \in \Omega$ et f et g deux applications de Ω dans $\mathbb{R}$. On suppose que f et g sont différentiables en x et que $g(x) \neq 0$. Alors il existe $U \subset \Omega$ ouvert de E tel que $1/g$ et f/g soient définies sur U. De plus $1/g$ et f/g sont différentiables en x et*

$$D\left(\frac{1}{g}\right)(x)(h) = -\frac{Dg(x)(h)}{(g(x))^2}, D\left(\frac{f}{g}\right)(x)(h) = -\frac{f(x)Dg(x)(h) - g(x)Df(x)(h)}{(g(x))^2}.$$

Preuve. Laissée en exercice.

Chapitre 2

Théorème des accroissements finis

2.1 Le théorème

Commençons par énoncer un premier théorème avec des fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.
Théorème 2.1.1. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. Soit $[a, b] (a < b)$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Soit $f : [a, b] \to E$ et $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux applications continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$, telles que pour tout $x \in]a, b\,[$, $\|f'(x)\| \leq g'(x)$. Alors,*

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a)$$

Preuve. On va montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ on a

$$\|f(b) - f(a)\| \leq g(b) - g(a) + \varepsilon(b - a) + \varepsilon$$

ce qui établira le théorème car ε est aussi petit qu'on veut. Pour cela on considère pour $\varepsilon > 0$ donné l'ensemble A des $x \in [a, b]$ tels que

$$\|f(x) - f(a)\| > g(x) - g(a) + \varepsilon(x - a) + \varepsilon.$$

Si A est vide, la preuve est terminée. Supposons donc que $A \neq \emptyset$. Comme ε est donné et strictement positif, par continuité de f et g il existe $\eta > 0$ tel que $[a, a + \eta] \cap A = \emptyset$. Donc A est non vide (par hypothèse) et minoré par a. Il admet donc une borne inférieure notée c. On a $a < c$ d'après ce qui précède. De plus $c \notin A$. En effet, A est défini par une inégalité stricte entre fonctions continues, donc A est ouvert. Il suit que si $c \in A$ alors tout un voisinage de c sera dans A, ce qui contredit le fait que c soit la borne inférieure de A. De même $c < b$ car sinon on aurait $A = \{b\}$ et $c = b$ serait dans A. On a donc $c \in]a, b[$ et comme $c \notin A$ on a

$$\|f(c) - f(a)\| \leq g(c) - g(a) + \varepsilon(c - a) + \varepsilon$$

De plus

$$\|f'(c)\| \leq g'(c)$$

Ecrivons que f et g sont dérivables en c :

$$f(c+h) = f(c) + hf'(c) + |h|\varepsilon_1(h)$$
$$g(c+h) = g(c) + hg'(c) + |h|\varepsilon_2(h)$$

où $\varepsilon_1(h)$ et $\varepsilon_2(h)$ tendent vers 0 lorsque $h \to 0$. Nous allons montrer que pour $h > 0$ assez petit, $c + h \notin A$, ce qui contredira le fait que $c = \inf A$. Pour $h > 0$, on a

$$\begin{aligned}
\|f(c+h) - f(a)\| &\leq \|f(c+h) - f(c)\| + \|f(c) - f(a)\| \\
&\leq h\left(\|f'(c)\| + \|\varepsilon_1(h)\|\right) + g(c) - g(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon \\
&\leq h\left(g'(c) + \|\varepsilon_1(h)\|\right) + g(c) - g(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon \\
&\leq h\left(\|\varepsilon_1(h)\| - \varepsilon_2(h)\right) + g(c+h) - g(a) + \varepsilon(c-a) + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Et comme $\varepsilon_1(h)$ et $\varepsilon_2(h)$ tendent vers 0 lorsque $h \to 0$, on peut choisir h_0 assez petit pour que pour tout $h \in]0, h_0]$ on ait

$$\|\varepsilon_1(h)\| - \varepsilon_2(h) \leq \varepsilon$$

Il suit qu'il existe $h_0 > 0$ tel que pour tout $h \in]\,0, h_0]$,

$$\|f(c+h) - f(a)\| \leq g(c+h) - g(a) + \varepsilon(c+h-a) + \varepsilon$$

i.e. $]c, c+h_0] \cap A = \emptyset$. On a une contradiction. Donc $A = \emptyset$.
Le théorème des accroissements finis est maintenant un résultat à peu près immédiat.
Théorème 2.1.2. *(Inégalité des accroissements finis). Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, Ω un ouvert de E et f une application différentiable de Ω dans F. Soit $x, y \in \Omega$ tels que le segment $[x, y]$ soit inclus dans Ω. Alors*

$$\|f(y) - f(x)\| \leq \|y - x\| \sup_{z \in [x,y]} \|Df(z)\|_{\mathcal{L}(E,F)}$$

Preuve. On paramètre le segment $[x, y]$ de la façon usuelle

$$[x, y] = \{x + t(y - x), t \in [0, 1]\}$$

On note

$$k = \sup_{z \in [x,y]} \|Df(z)\|_{\mathcal{L}(E,F)}$$

Si $k = +\infty$, le théorème est trivial. On suppose donc que $k < \infty$. On définit les deux fonctions suivantes :

$$\phi : [0, 1] \to F, \phi(t) = f(x + t(y - x))$$
$$\psi : [0, 1] \to \mathbb{R}^+, \psi(t) = k\|y - x\|t$$

Elles vérifient bien les hypothèses du théorème 2.1. En effet

$$\begin{aligned}\|\phi'(t)\|_F &= \|Df(x+t(y-x))(y-x)\|_F \\ &\le \|Df(x+t(y-x))\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|(y-x)\|_E \\ &\le k\|y-x\| = \psi'(t)\end{aligned}$$

On a donc

$$\|\phi(1)-\phi(0)\| \le \psi(1)-\psi(0)$$

et le théorème est démontré.
A noter que dans le cas des fonctions définies sur un ouvert d'un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, on peut montrer une égalité des accroissements finis qui est une conséquence directe de l'égalité des accroissements finis usuelle.
Théorème 2.1.3. *(Une égalité des accroissements finis). Soit E un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{R}, \Omega$ *un ouvert de* E, f *une application de* Ω *dans* $\mathbb{R}$ *différentiable dans* Ω. *Soit* $x, y \in \Omega$ *tels que le segment* $[x, y]$ *soit inclus dans* Ω. *Alors il existe* $z \in]x, y[$ *tel que*

$$f(y)-f(x) = Df(z)(y-x)$$

Preuve. On considère l'application

$$\phi : [0,1] \to \mathbb{R}, \phi(t) = f(x+t(y-x))$$

Elle est dérivable sur $[0,1]$, donc par l'égalité des accroissements finis usuelle, il existe $c \in]0,1[$ tel que

$$\phi(1)-\phi(0) = \phi'(c)$$

On pose $z = x + c(y-x)$ et on a le résultat.

2.2 Applications

2.2.1 Classe $\mathcal{C}^1$ et dérivées partielles

Dans le cas où $E = \mathbb{R}^n$, l'égalité (1.1) donne une caractérisation simple de la classe $\mathcal{C}^1$ en fonction des dérivées partielles, que l'inégalité des accroissements finis va nous permettre de démontrer.
Proposition 2.2.1. *Soit* U *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$, F *un espace vectoriel normé sur* $\mathbb{R}$ *et* $f : U \to F$ *une application. Alors* f *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* U *si et seulement si les dérivées partielles de* f *par rapport à toutes les variables existent en tout point de* Ω *et sont continues sur* Ω.

Preuve. On note $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U alors les dérivées partielles de f par rapport à toutes les variables existent en tout point de U et sont données par

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = Df(x)\,(e_i)$$

Pour $x, y \in \Omega$ assez proches pour que $[x, y] \subset U$, on a

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right\|=\|Df(y)\,(e_i)-Df(x)\,(e_i)\|\leq\|Df(y)-Df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,F)}$$

Donc la continuité de Df sur U entraine celle des dérivées partielles.
Supposons maintenant que les dérivées partielles de f par rapport à toutes les variables existent en tout point de Ω et soient continues sur U. Alors l'application

$$L_x(h)=\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$$

est linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans F, et donc aussi continue car $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie. De plus l'application $x\mapsto L_x$ est continue de U dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,F)$. En effet pour $x,y\in\Omega$ assez proches pour que $[x,y]\subset U$, on a

$$\begin{aligned}\|L_y-L_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,F)}&=\sup_{\|h\|=1}\left\|\sum_{i=1}^n h_i\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right)\right\|_F\\&\leq\sum_{i=1}^n\left\|\frac{\partial f}{\partial x_i}(y)-\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\right\|_F\to 0\text{ lorsque }y\to x\end{aligned}$$

Il reste donc simplement à montrer que f est différentiable en tout point x de U et que $Df(x)=L_x$.
Pour $x\in U$ et $\rho>0$ tel que $B(x,\rho)\subset U$. Pour $h\in B(x,\rho)$, on a

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)=&\sum_{k=2}^n\left(f\left(x_1+h_1,\ldots,x_k+h_k,x_{k+1},\ldots,x_n\right)\right.\\&\left.-f\left(x_1+h_1,\ldots,x_{k-1}+h_{k-1},x_k,\ldots,x_n\right)\right)\\&+f\left(x_1+h_1,x_2,\ldots,x_n\right)-f\left(x_1,\ldots,x_n\right)\end{aligned}$$

Pour simplifier, on notera cela

$$\begin{aligned}f(x+h)-f(x)=\sum_{k=1}^n&(f\left(x_1+h_1,\ldots,x_k+h_k,x_{k+1},\ldots,x_n\right)\\&-f\left(x_1+h_1,\ldots,x_{k-1}+h_{k-1},x_k,\ldots,x_n\right))\end{aligned}$$

Il suit donc que

$$f(x+h)-f(x)-\sum_{i=1}^n h_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)=\sum_{k=1}^n\left(\phi_k\left(h_k\right)-\phi_k(0)\right),$$

où

$$\phi_k(t)=f\left(x_1+h_1,\ldots,x_{k-1}+h_{k-1},x_k+t,x_{k+1},\ldots,x_n\right)-t\frac{\partial f}{\partial x_k}(x)$$

Par l'inégalité des accroissements finis, on a

$$\|\phi_k(h_k) - \phi_k(0)\| \leq M_k |h_k|$$

où

$$M_k = \sup_{t\in[0,h_k]} \left\| \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1 + h_1, \ldots, x_{k-1} + h_{k-1}, x_k + t, x_{k+1}, \ldots, x_n) - \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \right\|.$$

On en déduit que (en prenant la norme $\|.\|_2$ sur $\mathbb{R}^n$ et en utilisant Cauchy-Schwartz)

$$\left\| f(x+h) - f(x) - \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right\|_F \leq \|h\| \left(\sum_{k=1}^{n} M_k^2 \right)^{1/2}$$

Comme par continuité des dérivées partielles de f sur U les M_k tendent vers 0 quand $h \to 0$, on obtient bien que f est différentiable en tout point x de U et que $Df(x) = L_x$.

2.2.2 Un théorème de point fixe

Théorème 2.2.1. *Soit E un espace de Banach et $f : E \to E$ une application. On suppose qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que pour tout $x \in E$,*

$$\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(E)} \leq k$$

Alors f admet un unique point fixe dans E, i.e. il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = x$.

Preuve. Commençons par montrer l'unicité. Supposons qu'il existe deux points fixes distincts x et y de f. C'est-à-dire qu'on a

$$f(x) = x, f(y) = y, x \neq y$$

Ceci est impossible car l'inégalité des accroissements finis nous donne

$$\|f(y) - f(x)\| \leq k\|y - x\| < \|y - x\| = \|f(y) - f(x)\|$$

C'est absurde.
Pour montrer l'unicité, considérons la suite (u_n) dans E définie par

$$u_0 = 0, u_{n+1} = f(u_n)$$

Cette suite converge si et seulement si la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} v_n, v_n = u_n - u_{n-1}$$

est convergente. Or d'après les théorème des accroissements finis, on a

$$\|u_n - u_{n-1}\| = \|f(u_{n-1}) - f\big(u_{n-2}\| \leq k\|u_{n-1} - u_{n-2}\| \leq \ldots \leq k^{n-1}\| u_1 - u_0\|$$

Comme $k \in [0, 1[$, la série est absolument convergente et donc convergente du fait qu'on est dans un espace de Banach.

Remarque On peut énoncer un théorème analogue pour $f : \Omega \to \Omega$ où Ω est un ouvert convexe de E.

Chapitre 3

Différentielles secondes et supérieures

3.1 Différentielles secondes

Notation. Etant donnés E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$, on notera $\mathcal{L}_k\left(E^k; F\right)$ l'espace des applications k-multilinéaires continues de $E \times E \times \ldots \times E$ (k fois) dans F.

Définition 3.1.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}, \Omega$ un ouvert de E, $x \in \Omega$ et $f : \Omega \to F$ une application. On dira que f est deux fois différentiable en x si elle est différentiable au voisinage de x et si l'application $x \mapsto Df$, définie au voisinage de x et à valeurs dans $\mathcal{L}_(E; F\big)$, est différentiable en x. On notera $D^2f(x)$ la différentielle de Df au point x. De façon analogue, on dira que f est deux fois différentiable sur Ω si f est différentiable sur Ω et l'application $x \mapsto Df(x)$, définie sur Ω et à valeurs dans $\mathcal{L}_(E; F\big)$, est différentiable sur Ω. On notera D^2f la différentielle seconde de f, i.e. la différentielle de Df.*

En chaque point x où elle est définie, la différentielle seconde de f est une application linéaire continue de E dans $\mathcal{L}(E; F)$. On a une identification canonique entre $\mathcal{L}_(E; \mathcal{L}(E; F)\big)$ et $\mathcal{L}_2(E \times E; F)$, espace des applications bilinéaires continues de $E \times E$ dans F. Plutôt que de considérer

$$D^2f(x) : h \mapsto (k \mapsto Df(x)(h)(k)),$$

on notera $D^2f(x)(h, k)$. Evidemment on pourrait craindre que l'isomorphisme canonique ci-dessus ne le soit en fait pas : on aurait en effet pu poser $D^2f(x)(h, k) := D^2f(x)(k)(h)$ au lieu de $D^2f(x)(h)(k)$. Cela n'a en fait aucune importance comme le montre le théorème de Schwarz.

Théorème 3.1.1. *(de Schwarz). Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}, \Omega$ un ouvert de $E, x \in \Omega, f : \Omega \to F$ une application 2 fois différentiable en x. Alors*

$$\lim_{(h,k)\to(0,0),(h,k)\in E\times E} \frac{f(x+h+k) - f(x+h) - f(x+k) + f(x) - D^2f(x)(h,k)}{(\|h\| + \|k\|)^2} = 0.$$

Il suit en particulier que $D^2f(x)$ est une application bilinéaire continue symétrique, i.e.

$$D^2f(x)(h, k) = D^2f(x)(k, h)\forall(h, k) \in E \times E$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Comme Df est différentiable en x, il existe $\delta > 0$ tel que, pour $\|h\| < 2\delta$ on ait

$$\left\|Df(x+h)-Df(x)-D^2f(x)(h)\right\|_{\mathcal{L}(E;F)}\leq\varepsilon\|h\|. \tag{3.1}$$

Soit h et k de normes inférieures à δ. On pose

$$g_h(k)=f(x+h+k)-f(x+h)-f(x+k)+f(x)-D^2f(x)(h,k)$$

En utilisant ce qu'on a vu sur la différentielle d'une application linéaire continue, il vient

$$\begin{aligned}Dg_h(k)=&Df(x+h+k)-Df(x+k)-D^2f(x)(h)\\=&\left[Df(x+h+k)-Df(x)-D^2f(x)(h+k)\right]\\&-\left[Df(x+k)-Df(x)-D^2f(x)(k)\right].\end{aligned}$$

En utilisant (3.1), il suit pour $\|h\|<\delta$ et $\|k\|<\delta$,

$$\|Dg_h(k)\|_{\mathcal{L}(E;F)}\leq\varepsilon(\|h+k\|+\|k\|)\leq2\varepsilon(\|h\|+\|k\|)$$

On applique alors le théorème des accroissements finis à g_h dans le segment $[0,k]$ avec $\|k\|<\delta$ et pour $\|h\|<\delta$. Comme $g_h(0)=0$,

$$\|g_h(k)\|\leq2\varepsilon(\|h\|+\|k\|)\|k\|\leq2\varepsilon(\|h\|+\|k\|)^2$$

On a donc établi la première partie du théorème. Fixons maintenant h et k dans E. On a

$$\begin{aligned}0&=\lim_{t\to0,t>0}\frac{f(x+th+tk)-f(x+th)-f(x+tk)+f(x)-D^2f(x)(th,tk)}{(\|th\|+\|tk\|)^2}\\&=\lim_{t\to0,t>0}\frac{f(x+th+tk)-f(x+th)-f(x+tk)+f(x)-t^2D^2f(x)(h,k)}{t^2(\|h\|+\|k\|)^2}\\&=\left(\lim_{t\to0,t>0}\frac{f(x+th+tk)-f(x+th)-f(x+tk)+f(x)}{t^2(\|h\|+\|k\|)^2}\right)-\frac{D^2f(x)(h,k)}{(\|h\|+\|k\|)^2}\end{aligned}$$

On obtient donc

$$D^2f(x)(h,k)=\lim_{t\to0,t>0}\frac{f(x+th+tk)-f(x+th)-f(x+tk)+f(x)}{t^2}$$

et comme l'expression dans la limite est symétrique en (h,k), il suit que $D^2f(x)(h,k)$ l'est également.

3.2 Différentielles d'ordre supérieur

De proche en proche on définit les différentielles successives d'une application, si elles existent. On dira que f est k fois différentiable en x si elle est $k-1$ fois différentiable dans un voisinage de x et si l'application $D^{k-1}f$ est différentiable en x. On notera alors $D^kf(x)$ sa différentielle. On la considèrera comme une application k-multilinéaire continue de E^k dans F, i.e. un élément de $\mathcal{L}_k\left(E^k;F\right)$, plutôt que comme un élément de

$$\mathcal{L}_(E;\mathcal{L}_(E;\ldots\mathcal{L}_(E;F)))$$

On a une version du théorème de Schwarz pour les dérivées d'ordre supérieur.

Théorème 3.2.1. *(Généralisation du théorème de Schwarz). Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}, \Omega$ un ouvert de $E, x \in \Omega, f : \Omega \to F$ une application k fois différentiable en x. Alors $D^k f(x) \in \mathcal{L}_k\left(E^k; F\right)$ est une application k-linéaire continue symétrique, i.e. pour toute permutation s de $\{1, 2, \ldots, k\}$,*

$$D^k f(x)\left(h_1, h_2, \ldots, h_k\right) = D^k f(x)\left(h_{s(1)}, h_{s(2)}, \ldots, h_{s(k)}\right), \quad \forall\left(h_1, h_2, \ldots, h_k\right) \in E^k$$

Preuve. Par récurrence. La propriété est vraie pour $k = 2$. Supposons qu'elle le soit pour $2 \leq p \leq k, k \geq 2$ donné. On a

$$D^{k+1} f(x) = DD^k f(x)$$

et $D^k f$ est à valeurs dans $\mathcal{L}_k^{\text{sym}}\left(E^k; F\right)$, espace des applications k-linéaires continues symétriques de E^k dans F. Donc si la permutation s de $\{1, 2, \ldots, k+1\}$ laisse 1 invariant, le résultat est vrai. Si elle ne laisse pas 1 invariant, elle est la composée de permutations laissant 1 invariant et de la permutation qui ne fait qu'échanger 1 et 2 en laissant $3, \ldots, k+1$ fixes. Il suffit donc de prouver que

$$D^{k+1} f(x)\left(h_1, h_2, h_3, \ldots, h_{k+1}\right) = D^{k+1} f(x)\left(h_2, h_1, h_3, \ldots, h_{k+1}\right)$$

Mais comme $D^{k+1} f = D^2 D^{k-1} f$, cette propriété découle du théorème de Schwarz.

Définition 3.2.1. *Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}, \Omega$ un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ une application. On dit que f est de classe $\mathcal{C}^k$ dans Ω (ou encore que $f \in \mathcal{C}^k(\Omega)$) pour $k \in \mathbb{N}^*$, si elle admet des différentielles successives jusqu'à l'ordre k et si elles sont toutes continues sur Ω. On dira que f est de classe $\mathcal{C}^0$ sur Ω (ou encore que $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$) si elle est continue sur Ω. On dira que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω (ou encore que $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$) si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur Ω pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Remarque 3.2.1. *Comme différentiabilité implique continuité, f est de classe $\mathcal{C}^k$ dans Ω si et seulement si elle admet des différentielles successives jusqu'à l'ordre k et si $D^k f$ est continue sur Ω. De même f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans Ω si et seulement si elle admet des différentielles successives à tous les ordres en tout point de Ω. On voit aussi que si $k > l$,*

$$f \in \mathcal{C}^k(\Omega) \Rightarrow f \in \mathcal{C}^l(\Omega)$$

3.2.1 Cas où $E = \mathbb{R}^n$

Dans cette situation, on peut donner une expression de différentielles k-ième en fonction des dérivées partielles d'ordre k de la fonction.

Proposition 3.2.1. *Soit Ω un ouvert de $E = \mathbb{R}^n$, F un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et $f : \Omega \to F$ une application. Si f est k fois différentiable en un point x de Ω, alors elle admet au voisinage de x toutes les dérivées partielles jusqu'à l'ordre $k-1$ et en x toutes les dérivées partielles d'ordre k. De plus la différentielle k-ième de f en x s'écrit*

$$D^k f(x)\left(h^1, \ldots, h^k\right) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} h_{i_1}^1 \ldots h_{i_k}^k \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_k}}(x)$$

Preuve C'est une conséquence directe de l'expression de la différentielle de f en fonction de ses dérivées partielles. On peut raisonner par récurrence en appliquant ce résultat à chaque étape.

On a aussi un caractérisation du fait qu'une fonction soit $\mathcal{C}^k$ en fonction de la continuité de ses dérivées partielles k-ièmes.
Proposition 3.2.2. *Soit Ω un ouvert de $E = \mathbb{R}^n$, F un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et $f : \Omega \to F$ une application. Alors f est $\mathcal{C}^k$ sur Ω si et seulement si elle admet en tout point de Ω des dérivées partielles par rapport à toutes les variables jusqu'à l'ordre k et ses dérivées partielles d'ordre k sont toutes continues sur Ω.*

Preuve. On applique par récurrence la caractérisation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ en termes de continuité de leurs dérivées partielles.

3.3 Quelques exemples

Voici quelques exemples de dérivées successives. Les vérifications sont de bonnes applications du cours et peuvent être traitées en exercices.

3.3.1 Application bilinéaire continue

Soit E, F et G trois espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et $f : E \times F \to G$ une application bilinéaire continue. Alors $f \in \mathcal{C}^\infty(E \times F)$ et

$$\begin{aligned} Df(x,y)(h,k) &= f(x,k) + f(h,y), \\ D^2 f(x,y)\left((h_1,k_1),(h_2,k_2)\right) &= f(h_2,k_1) + f(h_1,k_2), \\ D^k f &\equiv 0 \text{ pour } k \geq 3. \end{aligned}$$

3.3.2 Application quadratique continue

Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, $\phi : E^2 \to F$ une application bilinéaire continue. On définit l'application quadratique $q : E \to F$ par $q(x) = \phi(x,x)$. Alors $q \in \mathcal{C}^\infty(E)$ et

$$\begin{aligned} Dq(x)(h) &= \phi(x,h) + \phi(h,x), \\ D^2 q(x)(h,k) &= \phi(k,h) + \phi(h,k), \\ D^k q &\equiv 0 \text{ pour } k \geq 3. \end{aligned}$$

3.3.3 Application multilinéaire continue

Une application n-multilinéaire continue entre des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$:
$E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ et F est $\mathcal{C}^\infty$ sur $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ et toutes ses dérivées d'ordre $k \geq n+1$ sont nulles. On pourra "s'amuser" à trouver l'expression de ses dérivées successives d'ordres inférieurs ou égaux à n.

3.4 Formules de Taylor

On rappelle tout d'abord le résultat essentiel qui est à la base des formules de Taylor avec reste intégral :

Théorème 3.4.1. *(Théorème fondamental du calcul différentiel). Soit F un espace de Banach, $\phi : [a, b] \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur $[a, b]$. Alors*

$$\phi(b) = \phi(a) + \int_a^b \phi'(t)\mathrm{d}t$$

Théorème 3.4.2. *(Formule de Taylor avec reste intégral). Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$ et F un espace de Banach sur $\mathbb{R}, \Omega$ un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur Ω. Soit $x \in \Omega$ et $h \in E$ tels que le segment $[x, x + h]$ soit contenu dans Ω. Alors*

$$\begin{aligned} f(x+h) =& f(x) + Df(x)(h) + \frac{1}{2!}D^2 f(x)(h,h) + \ldots + \frac{1}{n!}D^n f(x) \underbrace{(h,h,\ldots,h)}_{n \text{ fois}} \\ &+ \frac{1}{n!}\int_0^1 (1-t)^n D^{n+1} f(x+th) \underbrace{(h,h,\ldots,h)}_{n+1 \text{ fois}} \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Théorème 3.4.3. *(Formule de Taylor avec reste de Lagrange). Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}, \Omega$ un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ une application $n + 1$ différentiable sur Ω. On suppose qu'il existe $C > 0$ telle que*

$$\left\|D^{n+1} f(y)\right\|_{\mathcal{L}_{n+1}(E^{n+1};F)} \leq C \text{ pour tout } y \in \Omega$$

Soit $x \in \Omega$ et $h \in E$ tels que le segment $[x, x + h]$ soit contenu dans Ω. Alors

$$\begin{aligned} &\left\| f(x+h) - f(x) - Df(x)(h) - \frac{1}{2!}D^2 f(x)(h,h) - \ldots - \frac{1}{n!}D^n f(x)(h,h,\ldots,h) \right\| \\ &\leq \frac{C\|h\|^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

En fait on peut encore affaiblir les hypothèses si on accepte de perdre un peu de contrôle sur le reste. La formule de Taylor qui suit est essentiellement équivalente à la définition de la différentielle n-ième de f en x. Elle donne un développement limité de f en x à l'ordre n avec un minimum de contrôle sur le reste.

Théorème 3.4.4. *(Développement limité ou formule de Taylor-Young). Soit E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}, \Omega$ un ouvert de E et $f : \Omega \to F$ une application n fois différentiable sur Ω, admettant en x une différentielle ($n + 1$)-ième. Alors*

$$\begin{aligned} f(x+h) =& f(x) + Df(x)(h) + \frac{1}{2!}D^2 f(x)(h,h) + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1} f(x)(h,h,\ldots,h) \\ &+ \|h\|^{n+1}\varepsilon(h) \end{aligned}$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$.

Preuve du Théorème 3.4. On pose

$$\begin{aligned}\psi(t) =& f(x+th) + (1-t)Df(x+th)(h) + \frac{(1-t)^2}{2!}D^2f(x+th)(h,h)\\ &+ \ldots + \frac{(1-t)^n}{n!}D^nf(x+th)(h,h,\ldots,h)\end{aligned}$$

Alors Ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ et

$$\psi'(t) = \frac{(1-t)^n}{n!}D^{n+1}f(x+th)(h,h,\ldots,h)$$

La formule de Taylor avec reste intégral se réduit alors à

$$\psi(1) - \psi(0) = \int_0^1 \psi'(t)\mathrm{d}t$$

Preuve du Théorème 3.5. On pose

$$\begin{aligned}\psi(t) =& f(x+th) + (1-t)Df(x+th)(h) + \frac{(1-t)^2}{2!}D^2f(x+th)(h,h)\\ &+ \ldots + \frac{(1-t)^n}{n!}D^nf(x+th)(h,h,\ldots,h)\\ g(t) =& -\frac{C(1-t)^{n+1}}{(n+1)!}\end{aligned}$$

On a pour tout $t \in [0,1]$

$$\|\psi'(t)\| \leq g'(t)$$

et par le théorème 2.1, il suit

$$\|\psi(1) - \psi(0)\| \leq g(1) - g(0)$$

ce qui donne le résultat.
Preuve du Théorème 3.6. On sait que le résultat est vrai pour $n = 1$ d'après la définition de la différentiabilité de f en x. On procède maintenant par récurrence. Supposons que le théorème soit vrai pour n, i.e. avec une dernière dérivée d'ordre n et un reste de la forme $\|h\|^n\varepsilon(h)$. On pose $\phi(h) = f(x+h) - f(x) - Df(x)(h) - \frac{1}{2!}D^2f(x)(h,h) - \ldots - \frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}f(x)(h,h,\ldots,h)$.
On va calculer la différentielle de ϕ :

$$D\phi(h)(k) = Df(x+h)(k) - Df(x)(k) - D^2f(x)(h,k) - \ldots - \frac{1}{n!}D^{n+1}f(x)(h,h,\ldots,h,k)$$

On pose alors $g = Df$, on a

$$D\phi(h) = g(x+h) - g(x) - Dg(x)(h) - \ldots - \frac{1}{n!}D^ng(x)(h,h,\ldots,h)$$

qui est une égalité dans $\mathcal{L}(E,F)$. On applique alors l'hypothèse de récurrence à $D\phi(h)$:

$$D\phi(h) = \|h\|^n \varepsilon(h)$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ dans $\mathcal{L}(E, F)$ lorsque $h \to 0$. C'est-à-dire que pour tout $\eta > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|h\| < \delta \Rightarrow \|D\phi(h)\| \leq \eta \|h\|^n$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, il suit que pour tout $h \in E$ tel que $\|h\| < \delta$, on a

$$\|\Phi(h) - \phi(0)\| \leq \eta \|h\|^{n+1}$$

Et comme $\phi(0) = 0$, on a pour tout $h \in E$ tel que $\|h\| < \delta$,

$$\|\Phi(h)\| \leq \eta \|h\|^{n+1}$$

Le résultat est donc démontré.

3.5 Extrema locaux

Définition 3.5.1. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}, \Omega$ un ouvert de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$. On dit que f admet en $x \in \Omega$ un minimum local s'il existe un voisinage ouvert U de x tel que pour tout $y \in U$ on ait $f(y) \geq f(x)$. On dit que f admet en $x \in \Omega$ un maximum local s'il existe un voisinage ouvert U de x tel que pour tout $y \in U$ on ait $f(y) \leq f(x)$. Dans les deux cas on parle d'extremum local.*
L'extremum local est dit strict si on peut trouver un voisinage ouvert de x dans lequel les inégalités ci-dessus soient strictes pour $y \neq x$.
Définition 3.5.2. *Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}, \Omega$ un ouvert de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f admet en $x \in \Omega$ un point critique si f est différentiable en x et si $Df(x) = 0$.*
Proposition 3.5.1. *(Condition nécessaire d'extremum local : premier ordre). Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}, \Omega$ un ouvert de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application. Si f admet en $x \in \Omega$ un extremum local et si f est différentiable en x, alors x est un point critique de f.*

Preuve. On donne la preuve dans le cas d'un minimum local. Remarquons tout d'abord que $Df(x) = 0$ si et seulement si pour tout $v \in E, v \neq 0$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = 0.$$

C'est clair du fait que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = Df(x)(v).$$

Soit donc $v \in E, v \neq 0$. On sait que la dérivée directionnelle de f en x dans la direction de v existe, du fait que f est différentiable en x. C'est-à-dire que

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \text{ existe dans } \mathbb{R}$$

Pour $t > 0$, on a

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \geq 0$$

et pour $t < 0$,

$$\frac{f(x+tv) - f(x)}{t} \leq 0.$$

Il suit que

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x) = 0.$$

Le résultat est démontré.

Proposition 3.5.2. *(Condition nécessaire d'extremum local : deuxième ordre). Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}, \Omega$ un ouvert de E et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application différentiable. Si f admet en $x \in \Omega$ un extremum local et si f est deux fois différentiable en x, alors x est un point critique de f et la forme quadratique $D^2 f(x)(h,h)$ est positive, i.e. $D^2 f(x)(h,h) \geq 0$ pour tout $h \in E$.*

Preuve. On écrit la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$f(x+h) = f(x) + Df(x)(h) + \frac{1}{2} D^2 f(x)(h,h) + \|h\|^2 \varepsilon(h),$$

où $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$. On sait de plus que x est un point critique, donc

$$f(x+h) - f(x) = \frac{1}{2} D^2 f(x)(h,h) + \|h\|^2 \varepsilon(h) \geq 0 \text{ pour tout } h \text{ assez petit.}$$

Soit un vecteur v de norme 1 donné, si $D^2 f(x)(v,v) \neq 0$, alors pour t assez petit

$$\begin{aligned} 0 &\leq f(x+tv) - f(x) \\ &\leq t^2 \left(\frac{1}{2} D^2 f(x)(v,v) + \|v\|^2 \varepsilon(tv) \right) \end{aligned}$$

et on doit donc avoir $D^2 f(x)(v,v) > 0$.

Afin de pouvoir énoncer et surtout démontrer une condition suffisante d'extremum local strict, nous aurons besoin du résultat suivant.

Théorème 3.5.1. *Soit E un espace de Banach sur $\mathbb{R}$ et $\phi : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme quadratique définie positive, i.e. telle que pour tout $h \neq 0, \phi(h,h) > 0$. Alors il existe $K > 0$ tel que pour tout $h \in E$ on ait*

$$\phi(h,h) \geq K \|h\|^2.$$

Preuve. En dimension finie, on peut utiliser la compacité de la sphère unité. En effet l'application de S^1 dans $]0, +\infty[$ qui à v associe $\phi(v,v)$ est continue sur S^1 qui est compacte, donc elle admet sur S^1 un minimum. Comme ce minimum est la valeur de $\phi(v,v)$ pour un certain $v \in S^1$, il est strictement positif, i.e. il existe $K > 0$ tel que pour tout $v \in S^1$ on ait $\phi(v,v) \geq K$. Maintenant pour $h \neq 0$ on a

$$\phi(h,h) = \|h\|^2 \phi\left(\frac{h}{\|h\|}, \frac{h}{\|h\|}\right) \geq K\|h\|^2.$$

En dimension infinie, cette preuve n'est plus valable du fait que la sphère unité n'est plus compacte.

Par contre une autre preuve, basée sur l'identification entre formes bilinéaires et applications linéaires à valeurs dans l'espace des formes linéaires, fonctionne que la dimension soit finie ou non. Le fait que $\phi(h,h)$ soit définie positive implique que la forme bilinéaire ϕ est non dégénérée, i.e. que l'application

$$x \mapsto \tilde{\phi}_x$$

où

$$\tilde{\phi}_x(y) = \phi(x,y)$$

est un isomorphisme de E sur son dual topologique $E' = \mathcal{L}(E,\mathbb{R})$. Donc il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $x \in E$

$$\left\|\tilde{\phi}_x\right\|_{\mathcal{L}(E,\mathbb{R})} = \sup_{\|y\|=1} \|\phi(x,y)\| \geq C_1\|x\|$$

Soit $x \neq 0$ donné. Par définition de la borne supérieure, il existe $y \in S^1$ tel que

$$\|\phi(x,y)\| \geq \frac{C_1}{2}\|x\|$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\frac{C_1^2}{4}\|x\|^2 \leq \|\phi(x,x)\|\|\phi(y,y)\|$$

Par ailleurs, ϕ étant continue, on sait qu'il existe $C_2 > 0$ tel que

$$\|\phi(u,v)\| \leq C_2\|u\|\|v\|$$

D'où

$$\frac{C_1^2}{4}\|x\|^2 \leq \|\phi(x,x)\|C_2\|y\|^2 = C_2\|\phi(x,x)\|$$

On obtient donc

$$\|\phi(x,x)\| \geq \frac{C_1^2}{4C_2}\|x\|^2$$

Comme C_1 et C_2 sont indépendants de x et du choix de y, le résultat est démontré.

Théorème 3.5.2. *(Condition suffisante d'extremum local). Soit E un espace de Banach, Ω un ouvert de $E, x \in \Omega$ et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application différentiable, deux fois différentiable en x. Si :*

1. *x est un point critique de f ;*
2. *la forme quadratique $D^2 f(x)(h,h)$ est définie positive (resp. définie négative) ;*
alors f admet en x un minimum (resp. maximum) local strict.

Preuve. On la fait dans le cas d'un minimum. Elle utilise le théorème précédent. Comme il existe $K > 0$ tel que $D^2 f(x)(h,h) \geq K\|h\|^2$ pour tout $h \in E$, alors

$$f(x+h) - f(x) = D^2 f(x)(h,h) + \|h\|^2 \varepsilon(h) \geq \|h\|^2 (K - \|\varepsilon(h)\|)$$

Comme $\varepsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to$, il existe $\eta > 0$ tel que pour $\|h \mid< \eta$ on ait $\|\varepsilon(h)\| \leq K/2$. Il suit que pour $\|h\| < \eta$ on a

$$f(x+h) - f(x) \geq \|h\|^2 \frac{K}{2} > 0$$

La fonction f admet donc en x un minimum local strict.

Chapitre 4

Inversion locale, fonctions implicites

4.1 Inversion locale, fonctions implicites

4.1.1 Difféomorphismes, inversion locale, inversion globale

Définition 4.1.1. *Soit E et F deux espaces de Banach, U un ouvert de E et V un ouvert de F. On dit qu'une application $\phi : U \to V$ est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U sur V si :*

1. *ϕ est une bijection de U sur V ;*
2. *ϕ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur U ;*
3. *ϕ^{-1} est $\mathcal{C}^k$ sur V.*

Théorème 4.1.1. *(Inversion locale). Soit E et F deux espaces de Banach, Ω un ouvert de E et ϕ une application de Ω dans F de classe $\mathcal{C}^k$. Soit $x \in \Omega$, on suppose que $Df(x)$ est un isomorphisme de E sur F (i.e. une application linéaire continue et d'inverse continu). Alors il existe U un voisinage ouvert de x dans Ω et V un voisinage ouvert de $f(x)$ dans F tels que ϕ soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U sur V.*

Preuve. Quitte à composer f avec des translations, on peut supposer que $x = 0_E$ et $f(x) = 0_F$. On a donc $f(0) = 0$ et la différentielle de f au point 0 est un isomorphisme de E dans F ; une telle application est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de E dans F. Il est donc équivalent de trouver un voisinage U de 0_E et un voisinage V de 0_F tels que f soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U dans V, et de trouver deux voisinages U et W de 0_E tels que $(Df(0))^{-1} \circ f$ soit un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme de U dans W (à noter que la différentielle en 0 de $(Df(0))^{-1} \circ f$ est l'identité). On peut donc sans perte de généralité supposer que $E = F$ et que $Df(0) = \mathrm{Id}_E$.

Soit $\varphi = \mathrm{Id} - f$. La différentielle de φ est nulle en 0 et, comme cette différentielle est continue, il existe un réel strictement positif r tel que la boule fermée $\bar{B}(0, r)$ de centre 0 et de rayon r soit incluse dans Ω et que la norme de la différentielle de φ soit toujours inférieure à $1/2$ sur cette boule. Définissons deux voisinages ouverts U et W de 0 par $W = B(0, r/2), U = B(0, r) \cap f^{-1}(W)$ (rappelons que f étant continue, $f^{-1}(W)$ est ouvert) et démontrons que de U dans W, f est bijective.

Pour prouver la surjectivité, considérons, pour tout point y de W, la fonction φ_y définie sur $B(0, r)$ par $\varphi_y(x) = y + \varphi(x)$.

L'inégalité des accroissements finis montre que φ est $1/2$-lipschitzienne sur $\bar{B}(0, r)$, i.e.

$$\forall x_1, x_2 \in \bar{B}(0,r), \|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)\| \leq \frac{1}{2}\|x_2 - x_1\|.$$

On en déduit d'une part que sa translatée φ_y l'est aussi et d'autre part, que φ_y envoie $\bar{B}(0,r)$ dans elle-même, et même dans $B(0,r)$, car pour tout x dans $\bar{B}(0,r)$ la norme de $\varphi(x)$ est inférieure ou égale à $r/2$ et celle de y strictement inférieure à $r/2$. Le théorème du point fixe montre l'existence d'un point z appartenant à $\bar{B}(0,r)$ tel que $\varphi_y(z) = z$, donc envoyé par f sur y. Et comme $\varphi_y(z) = z$, on a $z \in B(0,r)$ et de plus $f(z) = y \in W$ donc $z \in f^{-1}(W)$. On a donc trouvé $z \in U$ tel que $f(z) = y$.

L'injectivité s'obtient en utilisant à nouveau que φ est $1/2$ lipschitzienne. Pour tous x_1 et x_2 dans V, si l'on note y_1 et y_2 leurs images par f, on a

$$\|x_1 - x_2\| = \|\varphi(x_1) + f(x_1) - \varphi(x_2) - f(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\| + \|y_1 - y_2\|$$

ce qui se réécrit

$$\|x_1 - x_2\| \leq 2\|y_1 - y_2\|$$

et permet de conclure.
Il reste maintenant à montrer que la fonction réciproque de f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur W. Remarquons d'abord que pour tout x dans U, l'application linéaire $Df(x)$ est inversible et d'inverse continu. En effet, $Df(x) = \mathrm{Id}_E - D\varphi(x)$ et $D\varphi(x)$ est de norme inférieure à $1/2$, donc la série

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} (D\varphi(x))^n$$

est convergente et sa somme est inverse de $Df(x)$, de norme inférieure à 2 .
Soit y dans W et x son antécédent dans U par f, démontrons qu'au point y, f^{-1} est différentiable et que sa différentielle n'est autre que l'inverse de $Df(x)$. Pour tout vecteur k de E tel que $y+k$ soit encore dans W, notons $x+h$ l'antécédent dans U de $y+k$ par f. Comme

$$k = f(x+h) - f(x) = Df(x)(h) + \|h\|\varepsilon(h)$$

on en déduit

$$f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) = h = (Df(x))^{-1}(k - \|h\|\varepsilon(h)) = (Df(x))^{-1}(k) + \|k\|\varepsilon(k)$$

la dernière égalité venant du fait (démontré plus haut dans la preuve d'injectivité) que $\|h\| \leq 2\|k\|$.
On a donc montré que f^{-1} est différentiable dans W et que pour tout $y \in W$,

$$D\left(f^{-1}\right)(y) = \left(Df\left(f^{-1}(y)\right)\right)^{-1}$$

C'est-à-dire que

$$D\left(f^{-1}\right) = (Df)^{-1} \circ f^{-1}$$

Il reste encore à montrer que la fonction réciproque de f est de classe $\mathcal{C}^k$. On vient de prouver l'existence de la différentielle de la réciproque de f en montrant qu'elle était la composée de trois fonctions : la fonction f^{-1}, la différentielle de f, et la "fonction inverse" qui à tout isomorphisme bicontinu de E associe son inverse. La fonction inverse est infiniment différentiable, f est de classe $\mathcal{C}^k$ et la réciproque de f est continue (car différentiable), on en déduit que la réciproque de f est de classe $\mathcal{C}^1$. De proche en proche, on vérifie que la réciproque de f est de classe $\mathcal{C}^k$.
Théorème 4.1.2. *(Inversion globale). Soit E et F deux espaces de Banach, Ω un ouvert de E et ϕ une application de Ω dans F de classe $\mathcal{C}^k$. Si f est injective et si pour tout $x \in \Omega$, $Df(x)$ est un isomorphisme de E sur F, alors $f(\Omega)$ est un ouvert de F et ϕ est un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme de Ω sur $f(\Omega)$.*

Preuve. C'est une conséquence directe du théorème d'inversion locale.

4.2 Théorème des fonctions implicites

Théorème 4.2.1. *(des fonctions implicites). Soit E, F et G trois espaces de Banach et f une application de classe C^k définie sur un ouvert Ω de $E \times F$ et à valeurs dans G. Soit (x_0, y_0) un point de Ω tel que $f\left(x_0, y_0\right)=0$ et tel que la différentielle partielle $D_y f\left(x_0, y_0\right)$ (i.e. la différentielle en y_0 de $y \mapsto f\left(x_0, y\right)$) soit un isomorphisme (i.e. une application linéaire bijective continue et d'inverse continu) de F dans G. Il existe un voisinage ouvert U de x_0 dans E, un voisinage ouvert V de y_0 dans F et une fonction ϕ de classe $\mathcal{C}^k$ définie sur U à valeurs dans F, tels que :*

1. *$U \times V \subset \Omega$,*
2. *$\{(x, y) \in U \times V ; f(x, y)=0\}=\{(x, \phi(x) ; x \in U\}$, autrement dit*

$$((x, y) \in U \times V \textit{ et } f(x, y)=0) \Leftrightarrow(x \in U \textit{ et } y=\phi(x)).$$

La différentielle de ϕ en un point $x \in U$ est donnée par

$$D \phi(x)=-\left(D_y f(x, \phi(x))\right)^{-1} \circ D_x f(x, \phi(x))$$

Preuve. Le principe consiste à traduire la question sous une forme telle qu'il devient possible d'appliquer le théorème d'inversion locale. On considère l'application ψ_1, de Ω dans $E \times G$, définie par :

$$\psi_1(x, y)=(x, f(x, y))$$

Cette application est de classe $\mathcal{C}^k$ et sa différentielle au point (x_0, y_0) est un isomorphisme de $E \times F$ sur $E \times G$. En effet, on a

$$D \psi_1\left(x_0, y_0\right)(h, k)=\left(h, D_x f\left(x_0, y_0\right)(h)+D_y f\left(x_0, y_0\right)(k)\right).$$

La bijectivité de $D \psi_1\left(x_0, y_0\right)$ est simple à montrer. Soit $v \in E, w \in G$ et cherchons un antécédent (h, k) à (v, w) par $D \psi_1\left(x_0, y_0\right)$. Le seul choix possible de h est $h=v$, puis on utilise le fait que $D_y f\left(x_0, y_0\right)$ est un isomorphisme de F sur G : il existe un unique $k \in F$ tel que

$$D_x f\left(x_0, y_0\right)(v)+D_y f\left(x_0, y_0\right)(k)=w$$

On a donc que $D\psi_1\left(x_0, y_0\right)$ est linéaire continue. Par le théorème de Banach-Schauder (théorème de l'application ouverte), elle est ouverte, d'où il suit que $D\psi_1\left(x_0, y_0\right)^{-1}$ est continue [1].

Le théorème d'inversion locale montre que ψ_1 se restreint en un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^k$ entre un ouvert $W \times V$ dans $E \times F$, contenant (x_0, y_0), et un ouvert $\mathcal{O}$ dans $E \times G$ contenant ($x_0, 0$) et nécessairement inclus dans $W \times G$.

Ceci se traduit par l'existence d'une application ψ_2 de classe $\mathcal{C}^k$, de $\mathcal{O}$ dans F, vérifiant :

$$\forall (x,z) \in \mathcal{O} \quad (x, \psi_2(x,z)) \in W \times V \quad \text{et} \quad \forall (x,y) \in W \times V \quad f(x,y) = z \Leftrightarrow \psi_2(x,z) = y.$$

On définit alors l'application $U = \mathcal{O} \cap \{z = 0\}$ qui est un ouvert de E car l'image de $\mathcal{O}$ ouvert de $E \times F$ par une projection, qui est une application linéaire continue surjective et donc ouverte. Par construction, $U \subset W$. L'application ϕ, de U dans V définie par $\phi(x) = \psi_2(x, 0)$, vérifie alors les propriétés annoncées.

Calculons maintenant la différentielle de ϕ. On différencie simplement la relation

$$f(x, \phi(x)) = 0$$

On obtient :

$$D_x f(x, \phi(x)) + D_y f(x, \phi(x)) \circ D\phi(x) = 0$$

d'où le résultat.