الكلية متعددة التخصصات تازة

FACULTÉ POLYDISCIPLINAIRE DE TAZA

جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس

UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES

Travaux dérigés du Calcul différentiel

Filière : SMA, S5

Prof. Yazough Chihab

Année universitaire : 2025/2026

Table des matières

Chapitre 1

Espaces de Banach et Applications linéaires

Table des matières

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Montrer que tout sous-ensemble compact de E est un fermé borné de E.
2. Montrer que si E est de dimension finie, alors E est un espace de Banach.
3. Montrer que si E est de dimension finie, alors toutes les normes (possible) sur E sont équivalentes.
4. (i) Soit F un sous espace vectoriel propore fermé de E. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $x \in E$ tel que $\|x\| = 1$ et $\operatorname{dist}(x, F) > 1 - \varepsilon$
   (ii) En déduire que si la boule unité fermée de E est compact, alors E est de dimension finie.

Solution :

1. Soit K une partie compacte de E,
   K est fermé :
   Soient $(x_n) \subseteq K$ et $x \in E$ tel que : $x_n \longrightarrow x$. Puisque K est compact, alors il existe une sous-suite $\left(x_{\phi(n)}\right)$ de la suite (x_n) telle que $x_{\phi(n)} \longrightarrow y \in K$.($\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante).
   Le fait que $x_n \longrightarrow x$ implique que $x_{\phi(n)} \longrightarrow x$, et par l'unicité de la limite on en déduit que $y = x$, donc $x \in K$, par suite K est un fermée de E.
   K est borné : Supposons, par l'absurde, que K n'est pas bornée dans E, C'est-à-dire :

$$(\forall M > 0), (\exists x \in K) : \|x\| > M$$

Alors $(\forall n \in \mathbb{N}), (\exists x_n \in K) : \|x_n\| > n$. Puisque K est compact, il existe une application $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante tel que : $\left(x_{\phi(n)}\right)$ soit convergente, en particulier elle est bornée.
Mais on a : $(\forall n \in \mathbb{N}) : \left\|x_{\phi(n)}\right\| > \phi(n) \geqslant n$, et ceci contredit le fait que ($x_{\phi(n)}$) est bornée.
Conclusion : K est bornée dans E.

2. On suppose que E est de dimension finie : $\dim(E) = n$ et montrons que E est un espace de Banach.
Si $d = 0$, alors la seule suite appartient à E est la suite constante nulle qui est convergente dans $(E, \|\|.) est de Banach. supposons donc que$ $\dim(E) = n > 0$.
Puisque la dimension de E est finie, alors il suffit de prouver que E est complet pour une norme bien choisit. dans cette question on munie E par la norme $\|.\|_1$ définie pour un vecteur $x \in E$ de de la forme $x = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i.e_i$, par : $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |\lambda_i|$.
Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy dans $(E, \| \cdot \|_1)$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
$x_n \in E \Longrightarrow \exists\, (\lambda_{1,n}, \ldots, \lambda_{d,n}) \in \mathbb{K}^d : x_n = \sum_{i=1}^{d} \lambda_{i,n}.e_i$ et donc $(x_n)_n = \left(\sum_{i=1}^{d} \lambda_{i,n}.e_i\right)_n$. d'ailleurs pour tout $i \in \{1, \ldots, d\}$ la suite $(\lambda_{i,n})_n$ est une suite de Cauchy dans ($\mathbb{K}, |.|), en$ effet ;

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists N \in \mathbb{N}), \big(\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2\big) : \begin{cases} n \geqslant N \\ m \geqslant N \end{cases} \Longrightarrow |\lambda_{i,n} - \lambda_{i,m}| \leqslant \|x_n - x_m\|_1 < \varepsilon$$

Or $\mathbb{K}$ est complet, d'où elle est convergente, soit $l_i = \lim_{n \to +\infty} l_{i,n}$, alors on a :

$$(\forall \varepsilon > 0), (\exists N_i \in \mathbb{N}), (\forall n \in \mathbb{N}) : n \geqslant N_i \Longrightarrow |\lambda_{i,n} - l_i| < \frac{\varepsilon}{d}$$

On a : $\|x_n - l\|_1 = \left\|\sum_{i=1}^{d} (\lambda_{i,n} - l_i) \cdot e_i\right\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |\lambda_{i,n} - l_i|$.
Par suite si on pose, $n_0 = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} N_i$ et $l = \sum_{i=1}^{d} l_i \cdot e_i$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} n \geqslant n_0 &\Longrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, d\} : n_0 \geqslant N_i \\ &\Longrightarrow \forall i \in \{1, \ldots, d\} : |\lambda_{i,n} - l_i| < \frac{\varepsilon}{d} \\ &\Longrightarrow \|x_n - l\|_1 < \varepsilon \end{aligned}$$

Ainsi $(x_n)_n$ est convergente dans $(E, \|.\|_1)$.
Conclusion : $(E, \|.\|_1)$ est complet.
3. On suppose que E est de dimension finie, soit $\dim(E) = n$.

Soit $B = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
On définit sur E la norme $\|.\|_\infty$ telle que $\|x\|_\infty = \|\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, avec $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \subseteq \mathbb{K}$.
Soit N une norme sur E,

– Montrons d'abord que : $N : (E, \|.\|_\infty) \longrightarrow (\mathbb{R}, |.|) est continue.$

En effet, soient $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$ deux éléments de $E, C = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} N(e_i)\,(> 0)$ et $M = C.n$; on a :

$$\begin{aligned} N(x - y) = N\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)\, e_i\right) &\leq \sum_{i=1}^{n} N\left((x_i - y_i)\, e_i\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|\, N(e_i) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \|x - y\|_\infty C \end{aligned}$$

où $C = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} N(e_i)\,(> 0)$. Donc

$$N(x-y) \leqslant nC\|x-y\|_\infty$$

D'autre part, d'après l'inégalité triangulaire inverse de la norme N on a :
$|N(x)-N(y)| \leqslant N(x-y) \Longrightarrow |N(x)-N(y)| \leqslant M\|x-y\|_\infty$ où $M = nC$.
Alors N est une application M - Lipschitzienne, par suite elle est continue.

– Soit $S := S_{\|.\|_\infty} = \{x \in E : \|x\|_\infty = 1\}$ la sphère unité de ($E, \|.\|_\infty$).
  S est fermé car c'est l'image réciproque de $\{1\}$, qui est fermé, par l'application continue $x \mapsto \|x\|_\infty$.
  S est bornée dans $(E, \|.\|_\infty)$.
  Puisque E est de dimension finie, donc S est un compact de ($E, \|.\|_\infty$).
  Le fait que N est une application continue sur le compact S montre que N est bornée et atteint ses bornes dans S. C-à-d il existe $(a,b) \in S^2$ telles que

$$m = N(a) \leqslant N(x) \leqslant N(b) = M \text{ pour tout } x \in S$$

Puisque $N(a) \neq 0$ et $N(b) \neq 0$, donc $m > 0$ et $M > 0$.
D'autre part, pour tout $x \in E \backslash \{0\}$, on a :

$$\frac{x}{\|x\|_\infty} \in S \Longrightarrow m \leqslant N\left(\frac{x}{\|x\|_\infty}\right) \leqslant M \Longrightarrow m \leqslant \frac{1}{\|x\|_\infty} \cdot N(x) \leqslant M \Longrightarrow m \cdot \|x\|_\infty \leqslant N(x) \leqslant M.\|x\|_\infty$$

Et puisque la dernière inégalité est vrai pour $x = 0_E$, alors on conclut que :

$$(\forall x \in E) m.\|x\|_\infty \leqslant N(x) \leqslant M.\|x\|_\infty$$

Donc les normes N et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes.
Conclusion : toute les normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie sont équivalentes.
4. (i) : Soient $\varepsilon > 0$ et $u \in E$ tel que : $u \notin F$, alors $d(u,F) > 0$; Car F est un sous-espace vectoriel propre fermée de E. Posons $\delta = d(u,F)$.

1 Si $1-\varepsilon \leqslant 0, (\Longleftrightarrow \varepsilon \geqslant 1)$, on a : $u \neq 0_E$, alors il suffit de choisir $x = \frac{u}{\|u\|}$, et dans ce cas $\|x\| = 1$ et $d(x,F) > 0 \geqslant 1-\varepsilon$.
2 Si $1-\varepsilon > 0, (\Longleftrightarrow \varepsilon < 1)$, d'après la propriété caractéristique de la borne inférieure, il existe $v_0 \in F$ tel que :

$$\delta \leqslant \|u-v_0\| < \delta + \frac{\delta\varepsilon}{1-\varepsilon} \Longleftrightarrow \delta \leqslant \|u-v_0\| < \frac{\delta}{1-\varepsilon} \Longrightarrow \frac{1}{\|u-v_0\|} > \frac{1-\varepsilon}{\delta}$$

Posons $x = \frac{u-v_0}{\|u-v_0\|}$, alors $\|x\| = 1$ et pour tout $y \in F$, on a :

$$\|x-y\| = \left\|\frac{u-v_0}{\|u-v_0\|} - y\right\| = \frac{\|u-(v_0+\|u-v_0\| \cdot y)\|}{\|u-v_0\|} \Longrightarrow \|x-y\| \geqslant \delta \cdot \frac{1-\varepsilon}{\delta} \Longrightarrow \|x-y\| \geqslant 1-\varepsilon$$

Car $v_0 + \|u-v_0\| .y \in F$, donc $\|x\| = 1$ et $d(x,F) \geqslant 1-\varepsilon$.
(ii) : On suppose que la boule fermée unité de E est compact et E est de dimension infinie, donc tout sous-espace de E de dimension finie est propre.

On choisit d'abord un vecteur unitaire arbitraire x_0 et on applique (i) ; (pour $\varepsilon = \frac{1}{2}$) à la droite $F_0 := \operatorname{vect}\{x_0\}$ qu'il engendre (elle est de dimension finie donc fermée dans E) : il existe un vecteur unitaire x_1 tel que : $d(x_1, F_0) \geqslant \frac{1}{2}$. Puis on applique (i) au plan F_1 engendré par (x_0, x_1) (elle est de dimension finie donc fermée dans E, il existe un vecteur unitaire x_2 tel que : $d(x_2, F_1) \geqslant \frac{1}{2}$, etc.., On obtient ainsi dans la boule unité fermée une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie par construction :

$$\forall (n,m) : n \neq m \Longrightarrow d(x_n, x_m) \geqslant \frac{1}{2} \tag{1.1}$$

donc la suite $(x_n) \subseteq B_f(0_E, 1)$ qui ne possède aucune sous-suite convergente , absurde ; car s'il existe une application $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que : $\left(x_{\phi(n)}\right)$ est convergente, alors ($x_{\phi(n)}$) sera de Cauchy, et ceci contradictoire avec (1.1).
Ainsi E est de dimension finie.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une constante $C_n > 0$ telle que pour tout pour tout polynôme unitaire de degré n, $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on ait $\int_0^1 |P(t)|dt \geq C_n$.

Solution :

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espce vectoriel des polynômes de degré inférier ou égale à n.
On considère sur E les normes suivantes : pour $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^{n} |a_i| \quad \text{et} \quad N_2(P) = \int_0^1 |P(t)|dt$$

Puisque $\dim(E) < \infty$, alors les deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes.
Donc il existe $\exists C_n > 0$ tel que $N_2(P) \geq C_n N_1(P)$ pour tout $P \in E$.
Pour un polynôme unitaire $P = a_0 + \ldots. + a_{n-1}X^n + X^n$ on a $N_1(P) \geq 1$.
D'où $\int_0^1 |P(t)|dt \geq C_n$.

Exercice 3

(Application linéaire non continue)

1. Soit $E := \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbb{R})$. On considére l'application Dérivation $D : E \to E$ définie par $D(f) = f'$ pour tout $f \in E$. Montrer que D n'est jamais continue sur E (quelle que soit la norme dont on munit E).
2. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égale à n, muni de la norme $\|P\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ où $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
   Montrer que l'application $D : E \to E$, définie par $D(P) = P'$, est continue.
3. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, l'espace des polynômes à coefficients réels muni de la norme $\|P\| = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ où $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.
   Montrer que l'application $D : E \to E$, définie par $D(P) = P'$, n'est pas continue.

Solution :

(1) Soit N une norme sur E.

Pour $a \in \mathbb{R}$, la fonction $f_a : x \mapsto e^{ax}$ est dans E, et elle vérifie $D(f_a) = af_a$.
Supposons que D est continue pour la norme N, puisque D est linéaire, il existe $C > 0$ tel que

$$N(D(f_a)) \leq CN(f_a)$$

On obtient, alors, pour tout $a \in \mathbb{R}$

$$|a|N((f_a)) \leq CN(f_a) \Longrightarrow |a| \leq C$$

C'est bien sûr impossible, et D n'est pas continue sur (E, N).
(2) Puisque D est une apllication linéaire et E est un esapce de dimension finie, alors D est continue.
(3) Supposons que D est continue. Alors il existe $C > 0$ telle que

$$\forall P \in E \quad \|D(P)\| \leq C\|P\|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, pour $P = X^n$, on trouve $D(P) = nx^{n-1}$ et donc

$$n = \|D(P)\| \leq C\|P\| = C$$

Ceci est impossible car $\mathbb{N}$ n'est pas majoré. D'où D n'est pas continue.

Exercice 5

Soient E et F deux evn, $\dim E \geq 1$, et u une application linéaire continue de E dans F.

1. Montrer qu'il existe une suite (x_n) d'éléments de E telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\| = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} \|u(x_n)\| = \|u\|$$

2. Montrer que si $\dim E < +\infty$, alors il existe $x \in E$, $\|x\| = 1$, tel que $\|u(x)\| = \|u\|$.
3. Soit $E := \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$. On définit une application linéaire $V : E \to E$ par :

$$\forall f \in E, \forall x \in [0,1], V(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$$

(a) Montrer que V est continue sur E.
(b) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite d'éléments de E définie par : $f_n(x) = ne^{-nx}, (n \geq 1, 0 \leq x \leq 1)$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|V(f_n)\|_1$, et en déduire la norme de l'application linéaire V.
(c) Montrer par l'absurde, qu'il n'existe pas de $f \in E$ telle que $\|f\|_1 = 1$ et $\|V\| = \|V(f)\|_1$.

Solution :

1. On a u est une application linéaire continue, alors $\|u\|$ est finie.

Soit $n \in \mathbb{N}$, alors il existe $x_n \in E$ telle que : $\|x_n\|_E = 1$ et $\|u\| - \frac{1}{n+1} \leqslant \|u(x_n)\|_F \leqslant \|u\|$.
Donc, la suite (x_n) vérifiée

$$[\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\|_E = 1] \text{ et } \left[\forall n \in \mathbb{N}, \|u\| - \frac{1}{n+1} \leqslant \|u(x_n)\|_F \leqslant \|u\|\right]$$

Et par passage à limite dans l'inégalité précédente on aura, $\lim_{n\to+\infty} \|u(x_n)\|_F = \|u\|$, d'où le résultat.
2. On suppose que E est de dimension finie, d'après la question précédente, il existe une suite (x_n) d'éléments de la boule unité de E telles que :

$$[\forall n \in \mathbb{N}, \|x_n\|_E = 1] \text{ et } \left[\lim_{n\to+\infty} \|u(x_n)\|_F = \|u\|\right]$$

Or la dimension de E est finie, d'où la boule unité de E est un compacte de E, donc il existe une application $\phi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telle que : $\left(x_{\phi(n)}\right)$ est convergente vers un élément x de la boule unité de E ; i.e $\|x\|_E = 1$, De plus la suite ($x_{\phi(n)}$) vérifiée :

$$\left[\forall n \in \mathbb{N}, \left\|x_{\phi(n)}\right\|_E = 1\right] \text{ et } \left[\lim_{n\to+\infty} \left\|u\left(x_{\phi(n)}\right)\right\|_F = \|u\|\right]$$

Et par passage à la limite dans l'égalité et l'inégalité précédentes et grâce à la continuité des normes $\|.\|_E, \|.\|_F$ et l'application u, on aura :

$$\|x\|_E = 1 \text{ et } \|u(x)\|_F = \|u\|$$

3. (a) Soit $f \in E$, on a :

$$\|V(f)\|_1 = \int_0^1 |V(f)(t)| \cdot dt = \int_0^1 \left|\int_0^t f(u) \cdot du\right| \cdot dt \Longrightarrow \|V(f)\|_1 \leqslant \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(u)| \cdot du\right) \cdot dt$$

Car, $\forall t \in [0;1], \left|\int_0^t f(u) \cdot du\right| \leqslant \int_0^t |f(u)|.du$ et $\int_0^t |f(u)|.du \leqslant \int_0^1 |f(u)|.du$
Donc,

$$\|V(f)\|_1 \leqslant \int_0^1 \|f\|_1.dt \Longrightarrow \|V(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1$$

Et puisque V est une application linéaire, alors elle est continue.
(b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0;1]$, on a :

$$V(f_n)(t) = \int_0^t f_n(u) \cdot du = \int_0^t ne^{-nu} \cdot du = \left[-e^{-nu}\right]_0^t = 1 - e^{-nt}$$

Donc,

- $\|f_n\|_1 = \int_0^1 |f_n(t)|\,.dt = V(f_n)(1) = 1 - e^{-n}$
- $\|V(f_n)\|_1 = \int_0^1 |V(f_n)(t)| \cdot dt = \int_0^1 1 - e^{-nt} \cdot dt = \left[t + \frac{1}{n}e^{-nt}\right]_0^1 = 1 + \frac{1}{ne^n} - \frac{1}{n}$

  D'une part, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n \in B(0_E, 1)$, où $B(0_E, 1)$ est la boule unité de E. alors :
  $\begin{cases} (\forall f \in E), \|V(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1 \\ \|u\| = \sup_{\|f\|_1 \leqslant 1} \|V(f)\|_1 \end{cases} \Longrightarrow (\forall f \in B(0_E, 1)) : \|V(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1 \leqslant 1 \Longrightarrow \|u\| \leqslant 1$
  D'autre part, $\|u\| \geqslant \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|V(f_n)\|_1$, or $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \|V(f_n)\|_1 = 1$, d'où $\|u\| \geqslant 1$.
  Car,

$$\left[(\forall n \in \mathbb{N}^*), \|V(f_n)\|_1 = 1 + \frac{1}{ne^n} - \frac{1}{n} \Longrightarrow \|V(f_n)\|_1 \leqslant 1\right] \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \|V(f_n)\|_1 = 1$$

Ainsi, $\|u\| = 1$

(c) On suppose qu'elle existe $f \in E$ telles que : $\begin{cases} \|f\|_1 = 1 \\ \|V(f)\|_1 = \|V\| = 1 \end{cases}$

On a : $\|V(f)\|_1 = \int_0^1 \left|\int_0^x f(t).dt\right| .dx$. Donc

$$\begin{aligned}
\|V(f)\|_1 &\leq \int_0^1 \left(\int_0^x |f(t)| \cdot dt\right) dx \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f(t)| \cdot dt - \int_x^1 |f(t)| \cdot dt\right) \cdot dx \\
&\leq \int_0^1 \left(\|f\|_1 - \int_x^1 |f(t)| \cdot dt\right) \cdot dx \\
&\leq \int_0^1 \|f\|_1 \cdot dx - \int_0^1 \left(\int_x^1 |f(t)| \cdot dt\right) \cdot dx \\
&\leq \|f\|_1 - \int_0^1 \left(\int_x^1 |f(t)| \cdot dt\right) \cdot dx
\end{aligned}$$

Donc $0 \leq \int_0^1 \left(\int_x^1 |f(t)|.dt\right) .dx \leqslant 0$; Car $(\|V(f)\|_1 = \|f\|_1 = 1)$ Ce qui montre que $(\forall x \in [0;1])$, $\int_x^1 |f(t)|.dt = 0$ et $\int_0^1 |f(t)|.dt = 0$. Ainsi $f = 0_E$. Et ceci contradictoire avec le fait que $\|f\|_1 = 1$.

Ainsi, il n'existe aucun élément f de E telles que : $\begin{cases} \|f\|_1 = 1 \\ \|V(f)\|_1 = \|V\| \end{cases}$

Exercice 6

Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(E_i, \|\cdot\|_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ et posons

$$E = \prod_{i=1}^d E_i$$

1. Montrer que si F est complet, alors ($\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n : F), \|.\|) estaussicomplet.$
2. Montrer que si les espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_d$ sont de dimension finie, alors toute application $f : E \longrightarrow F$ multilinéaire est continue.

Solution :

1. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans ($\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n : F)$, $\|.\|), alorsona$:

$$(\forall \varepsilon>0),(\exists N\in\mathbb{N}),\left(\forall(n,m)\in\mathbb{N}^2\right):\left\{\begin{array}{l} n\geqslant N\\ m\geqslant N\end{array}\right. \Longrightarrow \|f_n-f_m\|\leqslant\varepsilon$$

ou encore,

$$(\forall \varepsilon>0),(\exists N\in\mathbb{N}),\left(\forall(n,m)\in\mathbb{N}^2\right):\left\{\begin{array}{l} n\geqslant N\\ m\geqslant N\end{array}\right. \Longrightarrow (\forall X\in E),\|f_n(X)-f_m(X)\|_F\leqslant\varepsilon.\|x_1\|_1\ldots\|x_d\|_d \tag{1.2}$$

Soit $X=(x_1,\ldots,x_d)$ un élément de E, (1.2) entraine que $(f_n(X))$ est une suite de Cauchy dans F, or F est complet , alors elle est convergente dans F.
On dispose donc, d'une application $f:E\longrightarrow F, X=(x_1,\ldots,x_d)\longmapsto f(x)=\lim_{n\to\infty}f_n(X)$.
Donc, il suffit de prouver que $f\in\mathcal{L}(E_1,\ldots,E_n:F)$ et la suite (f_n) est convergente vers f. - $\underline{f \text{ est multilinéaire}}$: Soient $i\in[1;d],(x_i,x_i')\in E_i,x_j\in E_j$ pour $j\in[1;d]\backslash\{i\}$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, alors on a :

$$\begin{aligned} f(x_1,\ldots,\underbrace{\lambda.x_i+x_i'}_{i^{\text{me}}\text{ place}},\ldots,x_d) &= \lim_n f_n(x_1,\ldots,\lambda.x_i+x_i',\ldots,x_d)\\ &= \lim_n \lambda.f_n(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_d)+f_n(x_1,\ldots,x_i',\ldots,x_d)\\ &= \lambda.\lim_n f_n(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_d)+\lim_n f_n(x_1,\ldots,x_i',\ldots,x_d)\\ &= \lambda.f(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_d)+f(x_1,\ldots,x_i',\ldots,x_d)\end{aligned}$$

– $\underline{f \text{ est continue : En faisant tendre } m}$ vers l'infini dans (1.2), on trouve :

$$(\forall\varepsilon>0),(\exists N\in\mathbb{N}),(\forall n\in\mathbb{N}):n\geqslant N\Longrightarrow(\forall X\in E),\|f_n(X)-f(X)\|_F\leqslant\varepsilon\cdot\|x_1\|_1\ldots\|x_d\|_d \tag{1.3}$$

D'une part, il existe $p\in\mathbb{N}$, telle que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}),n\geqslant p\Longrightarrow(\forall X\in E),\|f_n(X)-f(X)\|_F\leqslant\|x_1\|_1\ldots\|x_d\|_d$$

D'autre part, l'application f_p est continue, alors :

$$(\exists M>0),(\forall X\in E),\|f_p(X)\|_F\leqslant M.\|x_1\|_1\ldots\|x_d\|_d$$

Or Pour tout $X\in E$, on a :

$$\begin{aligned}\|f(X)\|_F &\leqslant \|f(X)-f_p(X)\|_F+\|f_p(X)\|_F\\ &\leqslant \|x_1\|_1\ldots\|x_d\|_d+M.\|x_1\|_1\ldots\|x_d\|_d\\ &\leqslant (1+M).\|x_1\|_1\ldots\|x_d\|_d\end{aligned}$$

Donc f est continue.
$-(f_n)\longrightarrow f$: Il découlent de (1.3).

Conclusion : $(\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n : F), |||\cdot|||)$ est complet.
2. On suppose que $E_1, \dots, E_d$ sont de dimension finie et soit $f : E \longrightarrow F$ une application multilinéaire.
Pour tout $i \in [1; d]$, soient :

– $m_i = \dim(E_i)$.
– $\beta^{(i)} = \left(e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{m_i}^{(i)}\right)$ une base de E_i.

Soit $X = (x_1, \dots, x_d)$ un élément de E, alors on a :

$$(\forall i \in [1; d]), \left(\exists \left(\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{m_i}^{(i)}\right) \in \mathbb{K}^{m_i}\right) : x_i = \sum_{j_i=1}^{m_i} \lambda_{j_i}^{(i)} e_{j_i}^{(i)}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
f(X) &= f\left(\sum_{j_1=1}^{m_1} \lambda_{j_1}^{(1)} \cdot e_{j_1}^{(1)}, \sum_{j_2=1}^{m_2} \lambda_{j_2}^{(2)} \cdot e_{j_2}^{(2)}, \dots, \sum_{j_d=1}^{m_d} \lambda_{j_d}^{(d)} \cdot e_{j_d}^{(d)}\right) \\
&= \sum_{j_1=1}^{m_1} \lambda_{j_1}^{(1)} f\left(e_{j_1}^{(1)}, \sum_{j_2=1}^{m_2} \lambda_{j_2}^{(2)} \cdot e_{j_2}^{(2)}, \dots, \sum_{j_d=1}^{m_d} \lambda_{j_d}^{(d)} \cdot e_{j_d}^{(d)}\right) \\
&= \sum_{j_1=1}^{m_1} \lambda_{j_1}^{(1)} \sum_{j_2=1}^{m_2} \lambda_{j_2}^{(2)} f\left(e_{j_1}^{(1)}, e_{j_2}^{(2)}, \dots, \sum_{j_d=1}^{m_d} \lambda_{j_d}^{(d)} \cdot e_{j_d}^{(d)}\right) \\
&\vdots \\
&= \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \dots \sum_{j_d=1}^{m_d} \lambda_{j_1}^{(1)} \cdot \lambda_{j_2}^{(2)} \dots \lambda_{j_d}^{(d)} f\left(e_{j_1}^{(1)}, e_{j_2}^{(2)}, \dots, e_{j_d}^{(d)}\right)
\end{aligned}$$

Posons, $M = \max\left\{\left\|f\left(e_{j_1}^{(1)}, e_{j_2}^{(2)}, \dots, e_{j_d}^{(d)}\right)\right\|_F, i \in [1; d] \text{ et } j_i \in [1; m_i]\right\}$, alors on a :

$$\begin{aligned}
\|f(X)\|_F &\leqslant \left\|\sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \dots \sum_{j_d=1}^{m_d} \lambda_{j_1}^{(1)} \cdot \lambda_{j_2}^{(2)} \dots \lambda_{j_d}^{(d)} f\left(e_{j_1}^{(1)}, e_{j_2}^{(2)}, \dots, e_{j_d}^{(d)}\right)\right\|_F \\
&\leqslant \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \dots \sum_{j_d=1}^{m_d} \left|\lambda_{j_1}^{(1)}\right| \cdot \left|\lambda_{j_2}^{(2)}\right| \dots \left|\lambda_{j_d}^{(d)}\right| \cdot \left\|f\left(e_{j_1}^{(1)}, e_{j_2}^{(2)}, \dots, e_{j_d}^{(d)}\right)\right\|_F \\
&\leqslant M \cdot \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \dots \sum_{j_d=1}^{m_d} \left|\lambda_{j_1}^{(1)}\right| \cdot \left|\lambda_{j_2}^{(2)}\right| \dots \left|\lambda_{j_d}^{(d)}\right| \\
&\leqslant M \cdot \sum_{j_1=1}^{m_1} \sum_{j_2=1}^{m_2} \left|\lambda_{j_1}^{(1)}\right| \cdot \left|\lambda_{j_2}^{(2)}\right| \dots \underbrace{\sum_{j_d=1}^{m_d} \left|\lambda_{j_d}^{(d)}\right|}_{=\|x_d\|_{E_d}^{(1)}} \\
&\vdots \\
&\leqslant M \cdot \|x_1\|_{E_1}^{(1)} \dots \|x_d\|_{E_d}^{(1)}
\end{aligned}$$

Et puisque pour tout $i \in [1, d]$, E_i est de dimension finie, alors toute les normes sur E_i sont équivalentes. Donc,

$$(\forall i \in [1, d]), (\exists \alpha_i > 0), (\forall y \in E_i) : \|y\|_{E_i}^{(1)} \leqslant \alpha_i . \|y\|_i$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \|f(X)\|_F &\leqslant M.\alpha_1 \ldots \alpha_d . \|x_1\|_1 \ldots \|x_d\|_d \\ &\leqslant \alpha . \|x_1\|_1 \ldots \|x_d\|_d \end{aligned}$$

Avec $\alpha = (M+1).\alpha_1 \ldots \alpha_d (> 0)$.
Ainsi f est continue.

Chapitre 2

Applications Différentielles

Exercice 1

Étudier la différentiabilité de $f : E \to F$ et calculer sa différentielle éventuelle, dans chacun des cas suivants :

1. $f_1(X) = X^3; E = F = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. $f\left({}_2X\right) = \operatorname{tr}\left(X^3\right) X; E = F = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
3. $f_3(P) = P' - P^3; E = \mathbb{R}_n[X], F = \mathbb{R}_{3n}[X]$.
4. $f_4(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle x, b\rangle + \alpha$; E espace préhilbertien réel, $F = \mathbb{R}, (A \in \mathcal{L}(E), b \in E, \alpha \in \mathbb{R}$).
5. $f_5(x) = \|x\|; E$ espace préhilbertien réel, $F = \mathbb{R}$

Solution :

1. Soit $X \in E$ et $H \in E$ ona

$$f_1(A+H) - f(A) = (A+H)^3 - A^3 = A^2H + AHA + HA^2 + HAH + H^2A + H^3.$$

On considère l'applcation $\phi : E \mapsto E$ telle que $\phi(H) = A^2H + AHA + HA^2 + HAH$.
L'application ϕ est linéiare : évident.
Donc $\phi \in \mathcal{L}(E)$ puisque E est de dimension finie.
D'autre part,

$$f_1(A+H) - f_1(A) - \phi(H) = HAH + H^2A + H^3 = H\left(AH + HA + H^2\right) = o(\|H\|).$$

Donc f_1 est différentiable en tout $A \in E$ et sa différentielle est $Df_1 : E \mapsto \mathcal{L}(E)$ telle que

$$Df_1(A)(h) = A^2H + AHA + HA^2 + HAH$$

pour tout $A \in E$ et $H \in E$.

Remarque :

Si $f(X) = X^p\,(p \in \mathbb{N}^*)$, f est différentiable et sa différentielle est donnée par la formule suivante :

$$f'(X) \cdot H = \sum_{k=0}^{p-1} X^k \cdot H \cdot X^{p-k-1}.$$

2. $f_2(X) = \operatorname{tr}(X^3)\,X; E = F = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

On sait que l'application $X \mapsto \operatorname{tr}(X)$ est linéaire cntinue, donc elle est différentiable sur E.

Ceci implique que l'application $\begin{array}{ll} g: & E \mapsto E \\ & X \mapsto \operatorname{tr}(X^3). \end{array}$ est différentiable ; comme composée de deux applications différentiables f_1 et tr et on a pour tout $X \in E$ et $H \in E$

$$\begin{aligned} \mathrm{Dg}(X)(H) = \mathrm{Dtr}\,(f_1(X))\,Df_1(X)(H) &= \mathrm{Dtr}(X)\left(A^2H + AHA + HA^2 + HAH\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(A^2H + AHA + HA^2 + HAH\right) \\ &= 3\operatorname{tr}\left(A^2H\right) \end{aligned}$$

D'une part, on considère les applications $\begin{array}{ll} \phi_1: & E \mapsto \mathbb{K} \times \times E \\ & X \mapsto (g(X), X). \end{array}$ et $\begin{array}{ll} \phi_2: & \mathbb{K} \times \times E \mapsto E \\ & (\lambda, X) \mapsto \lambda X. \end{array}$

L'application ϕ_1 est différentiable car ses composantes sont différentiables et on pour tout $X \in E$ et $H \in E$

$$D\phi_1(X)(H) = (Dg(X)(H), H) = \left(3\operatorname{tr}\left(A^2H\right), H\right)$$

L'application ϕ_2 est différentiable (car ϕ_1 est bilinéaire continue). ET on a

$$D\phi_2(\lambda, X)(\mu, Y) = \phi_2(\lambda, Y) + \phi_2(\mu, X) = \lambda U + \mu X$$

Et par suite $f_2 = \phi_2 \circ \phi_1$ est différentiable (comme composée de deux applications différentiables) et sa différentielle est donnée par

$$\begin{aligned} Df_2(X)(H) &= D\phi_2\left(\phi_1(X)\right) D\phi_1(X)(H) \\ &= D\phi_2\left(\operatorname{tr}\left(X^3\right), X\right)\left(3\operatorname{tr}\left(A^2H\right), H\right) \\ &= \operatorname{tr}\left(X^3\right) H + 3\operatorname{tr}\left(A^2H\right) X \end{aligned}$$

pour tout $X \in E$ et $H \in E$.
3. Soit h un polynôme de degré $\leq n$. f est différentiable et on a :

$$\begin{aligned} f(P+h) - f(P) &= (P+h)' - (P+h)^3 - P' + P^3 \\ &= h' - 3P^2h - 3Ph^2 + h^3 \end{aligned}$$

Or $h^3 - 3Ph^2 = o(\|h\|)$. On a donc

$$f'(P).h = h' - 3P^2h$$

4. On a

$$
\begin{aligned}
f(x+h)-f(x) &= \langle A(x+h), x+h\rangle + \langle x+h, b\rangle + \alpha - \langle Ax, x\rangle - \langle x, b\rangle - \alpha \\
&= \langle Ax, x\rangle + \langle Ax, h\rangle + \langle Ah, x\rangle + \langle Ah, h\rangle + \langle x, b\rangle + \langle h, b\rangle + \alpha - \langle Ax, x\rangle - \langle x, b\rangle - \alpha \\
&= \langle Ax, h\rangle + \langle Ah, x\rangle + \langle h, b\rangle + \langle Ah, h\rangle
\end{aligned}
$$

et comme $h \mapsto \langle Ax, h\rangle + \langle Ah, x\rangle + \langle h, b\rangle$ est linéaire et $\langle Ah, h\rangle = o(\|h\|)$, donc f est différentiable et sa différentielle est $f'(x).h = \langle Ax, h\rangle + \langle Ah, x\rangle + \langle h, b\rangle$.
5. Soit $h \in E$. On sait que la norme est définie via le produit scalaire, c'est-à-dire $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.
Posons

$$g(x) = \langle x, x\rangle$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
g(x+h)-g(x) &= \langle x+h, x+h\rangle - \langle x, x\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, h\rangle + \langle h, x\rangle + \langle h, h\rangle - \langle x, x\rangle \\
&= 2\langle x, h\rangle + \|h\|^2
\end{aligned}
$$

Ainsi, $g'(x).h = 2\langle x, h\rangle$. Comme $u \mapsto \sqrt{u}$ est une application dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, la restriction de f à $E\backslash\{0\}$ est différentiable et sa différentielle est :

$$f'(x)\cdot h = \frac{2\langle x, h\rangle}{2\sqrt{\langle x, x\rangle^2}} = \frac{\langle x, h\rangle}{\langle x, x\rangle}$$

Exercice 2

1. Soit $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2; F)$ une application bilinéaire continue sur $E = E_1 \times E_2$ où E_1, E_2 et F des ecpaces de vectoriels normés sur $\mathbb{K}$.
   Montrer que B est différentiable en tout point (x_1, x_2) de $E_1 \times E_2$ et donner sa différentielle $DB(x_1, x_2)$.
2. Soit G un espace de Banach. On considère $f : \Omega \mapsto E_1$ et $g : \Omega \mapsto E_2$ deux applications de classe C^n sur Ω (où Ω un ouvert de G). Posons

$$
\begin{aligned}
\phi :&\Omega \mapsto F \\
&x \mapsto \phi(x) = B(f(x), g(x))
\end{aligned}
$$

(a) Montrer que l'application ϕ est de classe C^n.
(b) Déterminer $D\phi(x)(h)$ pour tout $x \in \Omega$ et $h \in G$.
3. Soient $\phi \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ une application multilinéaire continue sur $E = E_1 \times \ldots \times E_n$ où $E_1, \ldots, E_n$ et F des ecpaces de vectoriels normés sur $\mathbb{K}$.
Montrer que ϕ est différentiable en tout point et que sa différentielle est donnée par

$$D\phi(x_1, \ldots, x_n) \cdot (h_1, \ldots, h_n) = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_1, \ldots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n).$$

Solution :

1. B est différentiable. Pour $X=(x_1,x_2)\in E_1\times E_2$ et $H=(h_1,h_2)\in E_1\times E_2$ on a

$$B(X+H)-B(X)=B\left(x_1+h_1,x_2+h_2\right)-B\left(x_1,x_2\right)=B\left(x_1,h_2\right)+B\left(h_1,x_2\right)+B\left(h_1,h_2\right)$$

Il est clair que L'application $L:E_1\times E_2\mapsto F$ définie par $L\left(h_1,h_2\right)=B\left(x_1,h_2\right)+B\left(h_1,x_2\right)$ est linéaire.
Pour $H=(h_1,h_2)\in E_1\times E_2$ On considère la norme $\|(h_1,h_2)\|_E=\max\left(\|h_1\|_{E_1},\|h_2\|_{E_2}\right)$. Donc $\|h_i\|_{E_i}\leq\|(h_1,h_2)\|_E$ pour tout $i=1,2$.
Puisque B est bilinéaire continue, alors il existe $C>0$ tel que

$$\|B\left(h_1,h_2\right)\|_F\leq C\|h_1\|_{E_1}\|h_2\|_{E_2}$$

Donc
$\|L\left(h_1,h_2\right)\|\leq C\|x_1\|_{E_1}\|h_2\|_{E_2}+C\|h_1\|_{E_1}\|x_2\|_{E_2}\leq C\left(\|x_1\|_{E_1}+\|x_2\|_{E_2}\right)\|(h_1,h_2)\|_E$.
Ceci montre que L est continue.
D'autre part,

$$B\left(h_1,h_2\right)\leq C\|h_1\|_{E_1}\|h_2\|_{E_2}\leq C\|(h_1,h_2)\|_E^2$$

Donc $\frac{1}{\|(h_1,h_2)\|_E}\|B(X+H)-B(X)-L(H)\|$ tend vesr 0 lorsque (h_1,h_2) tend vers $(0,0)$. Par suite l'application B est différentiable sur $E_1\times E_2$ et sa différentielle est donnée par

$$\begin{aligned} DB:\ & E_1\times E_2\mapsto\mathcal{L}\left(E_1\times E_2,F\right)\\ & (x_1,x_2)\mapsto DB\left(x_1,x_2\right). \end{aligned}$$

avec $DB\left(x_1,x_2\right)\left(h_1,h_2\right)=B\left(x_1,h_2\right)+B\left(h_1,x_2\right)$ pour tout $(h_1,h_2)\in E_1\times E_2$.
Remarque : On peut montrer que l'application DB est linéaire continue, ceci prouve que DB est différentiable et même de classe C^∞.
2. L'application

$$\begin{aligned} \psi:\ & \Omega\mapsto E_1\times E_2\\ & x\mapsto(f(x),g(x)). \end{aligned}$$

est de classe C^n car ses composantes f et g sont de classe C^n.
Donc $\phi=B\circ\psi$ est de classe C^n. De plus, pour tout $x\in\Omega$ et $h\in G$ on a

$$\begin{aligned} D\phi(x)(h)&=DB(\psi(x))D\psi(x)(h)\\ &=DB(f(x),g(x))(Df(x)(h),Dg(x)(h))\\ &=B(f(x),Dg(x)h)+B(Df(x)(h),g(x)) \end{aligned}$$

3. Soient $E=\prod E_i, a=(a_1,a_2,\ldots,a_p)\in E$ et $B:E\to F$ une application p-linéaire continue. On définit l'application partielle $B_i:E_i\to F$ par :

$$B_i\left(x_i\right)=B\left(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_p\right)$$

Comme B est linéaire continue, alors B_i est continue. En effet,

$$\begin{aligned}\left\|B_i\left(x_i\right)\right\|_F&=\left\|B\left(a_1,\ldots,a_{i-1},x_i,a_{i+1},\ldots,a_p\right)\right\|\\&\leq k\prod_{j\neq i}\left\|a_j\right\|\left\|x_i\right\|\\&\leq k'\left\|x_i\right\|.\end{aligned}$$

De plus, B est différentiable pour $p=2$ on écrit $B\left(a_1+h,a_2+k\right)-B\left(a_1,a_2\right)=$ $\left(B\left(a_1,a_2\right)+B\left(a_1,k\right)+B\left(h,a_2\right)+B(h,k)\right)-B\left(a_1,a_2\right)=B\left(a_1,k\right)+B\left(h,a_2\right)+B(h,k)$. Et on prend $\varepsilon(h,k)=\frac{B(h,k)}{\|(h,k)\|}$, on obtient donc $B'\left(a_1,a_2\right)\cdot(h,k)=B\left(a_1,k\right)+B\left(h,a_2\right)$.
Le cas $p\geq 3$ se traite de la même façon. (car elle est p-linéaire est continue) et sa différentielle au point $a=\left(a_1,\ldots,a_p\right)$ est :

$$B'(a)\cdot\left(h_1,h_2,\ldots,h_p\right)=B\left(h_1,a_2,\ldots,a_p\right)+B\left(a_1,h_2,a_3,\ldots,a_p\right)+B\left(a_1,a_2,\ldots,h_p\right)$$

ainsi pour tout $i\in\{1,2,\ldots,p\}$ on a :

$$\frac{\partial B}{\partial x_i}(a)\cdot h_i=B\left(a_1,\ldots,a_{i-1},h_i,a_{i+1},\ldots,a_p\right)$$

Il suffit donc de montrer que $\frac{\partial B}{\partial x_i}(a)$ est continue au point a.

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial B}{\partial x_i}(a)\cdot h_i\right\|&=\left\|B\left(a_1,\ldots,a_{i-1},h_i,a_{i+1},\ldots,a_p\right)\right\|\\&\leq\|B\|\cdot\left\|h_i\right\|\prod_{j\neq i}\left\|a_j\right\|\\&\leq k\left\|h_i\right\|\end{aligned}$$

Donc, $\frac{\partial B}{\partial x_i}(a)$ est continue sur E_i pour tout i. Par ailleurs, a étant arbitraire dans E, alors les dérivées partielles sont continues sur E, d'où B est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 3

Soit ($E,<.>$) un espace préhilbertien réel. On considère la norme définie sur E par $\|x\|=\sqrt{\langle x.x\rangle}$ pour tout $x\in E$.

1. Soit $u\in\mathcal{L}(E)$. On considère l'application $f:E\to\mathbb{R}$, définie par

$$f(x)=<x,u(x)>$$

Montrer que f est différentiable et donner sa différentielle.
2. Étudier la diférentiablité de $\psi:E\ni x\mapsto\langle x,u(x)\rangle x\in E$.
3. Soit $f:\mathbb{R}\to E$ une application différentiable qui ne s'annule pas.

Montrer que la fonction $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, définie par $F(t)=\|f(t)\|$, est dérivable et donnée sa dérivée.

Solution :

(1) Montrons que f est différentiable.

On considère les applications $\begin{array}{ll}\phi_1 : & E \mapsto E \times E \\ & x \mapsto \phi_2 \to (x) = (x, u(x))\end{array}$ et $\phi_2 : \quad E \times E \mapsto \mathbb{R}$

$$x \mapsto \phi_1(x) = (x, u(x)).\text{ et } \quad (x, y) \mapsto \phi_2(x, y) =< x, y > .$$

L'application ϕ_1 est différentiable sur E car ses composantes $x \mapsto x$ et $x \mapsto u(x)$ sont différentiables ;.
Et on a

$$D\phi_1(x)(h) = (h, u(h)) \text{ pour tout } x \in E \text{ et } h \in E.$$

L'application ϕ_2 est bilinéaire continue d'après l'inégalita de Cauchy Schxartz donc elle est différentiable sur $E \times E$ et on a

$$D\phi_(x, y)\big)\,(h, k) =< x, k > + < h, y > \text{ pour tout } (x, y) \in E^2 \text{ et } (h, k) \in E \times E.$$

Puisque $f = \phi_2 \circ \phi_1$, alors elle est différentiable sur E et on pour tout $x \in E$ et $h \in E$

$$Df(x)(h) = D\phi_2\left(\phi_1(x)\right) \circ D\phi_1(x)(h) = D\phi_2(x, u(x))(h, u(h)) =< x, u(h) > + < h, u(h) > .$$

(2) La différentiabilité de ψ.

On considère les applications $\quad g_1 : \mathbb{K} \times E \mapsto E \quad$ et $\quad g_2 : \quad E \mapsto \mathbb{K} \times E$

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda x. \quad \text{el} \quad x \mapsto (f(x), x).$$

Il est clair que g_1 est bilinéaire continnue donc elle est différentiable et sa différentielle est donnée par

$$Dg_1(\lambda, x)(\alpha, y) = g_1(\lambda, x) + g_1(\alpha, y) = \lambda x + \alpha y.$$

D'autre part l'application g_2 est différeltaible car ses composante, $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto x$, sont différentaibles et on a pour tout $x \in E$ et $h \in E$

$$Dg_2(x)(h) = (Df(x)(h), h) = (< x, u(h) > + < h, u(h) >, h).$$

Puisque $\psi = g_1 \circ g_2$, alors ψ est différentiable sur E et sa différentielle est donnée pour tout $x \in E$ et $h \in E$ par

$$\begin{aligned} D\psi(x)(h) &= Dg_1\left(g_2(x)\right) \circ Dg_2(x)(h) \\ &= Dg_1(f(x), x)(< x, u(h) > + < h, u(h) >, h) \\ &= f(x)h + (< x, u(h) > + < h, u(h) >)x \end{aligned}$$

(3) Remarquons que $\forall x \in \mathbb{R} F(x) = \|f(x)\| = \sqrt{< f(x), f(x) >}$. Donc on peut décomposer F de la façon suivante $F = \psi_1 \circ \psi_2$ où

$$\psi_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto < f(x), f(x) > \end{array} \quad \text{et} \quad \psi_2 : \begin{array}{l} t \mapsto \mathbb{R} \\ t \mapsto \sqrt{t}. \end{array}$$

ψ_1 est différentiable sur $\mathbb{R}$ car c'est la composée de deux applications différentiables :
$\psi = \ell_2 \circ \ell_1 \ell_1 : x \mapsto (f(x), f(x))$ différentiable car ses composantes le sont et
$D\ell_1(x)(h) = (hf'(x), hf'(x))$, $\ell_2 : (u, v) \mapsto < u, v >$ différentiable car bilinéaire continue et
$D\ell_2(u, v)(u; k) =< u, h > + < h, v >$ Et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} D\psi_1(x)(h) &= D\ell_2\left(\ell_1(x)\right) \circ D\ell_1(x)(h) \\ &=< f(x), hf'(x) >=< hf'(x), f(x) > \\ &= 2 < f(x), hf'(x) > \end{aligned}$$

D'autre part l'application ψ_2 est différentiable sur $]0, +\infty[$ et $D\psi_2(x)(h) = \frac{h}{2\sqrt{x}}$ pour tout $x \in 0, +\infty[$ et $h \in \mathbb{R}$. Puisque f ne s'annule pas, alors $\psi_1(\mathbb{R}) \subset]0, +\infty[$. Donc $F = \psi_2 \circ \psi_1$ est différentiable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$ on a

$$\begin{aligned} DF(x)(h) &= D\psi_2\left(\psi_1(x)\right) \circ D\psi_1(x)(h) \\ &= D\psi_2(< f(x), f(x) >) 2 < f(x), hf'(x) > \\ &= \frac{2 < f(x), hf'(x) >}{2\sqrt{< f(x), f(x) >}} \\ &= \frac{< f(x), hf'(x) >}{\|f(x)\|}. \end{aligned}$$

Exercice 4

Soient $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ fixée.
Étudier la différentiabilité de l'application $\Phi : E \to E$ définie par :

$$\forall f \in E, \forall t \in [0, 1], \quad \Phi(f)(t) = \int_0^t g(f(x))dx$$

Coerrection :

Soit $f \in E$ et $u \in E$. Pour tout $t \in [0, 1]$ on a

$$(\Phi(f + u) - \Phi(f))(t) = \int_0^t g(f + u)(x) - g(f)(x)dx = \int_0^t g(f(x) + u(x))(x) - g(f(x))dx$$

D'après T.A.F, appliqué à la fonction g entre $f(x) + u(x)$ et $f(x)$, il existe $\theta(x) \in [0, 1]$ tel que

$$g(f(x) + u(x))(x) - g(f(x)) = u(x)g'(f(x) + \theta(x)u(x))$$

Donc

$$(\Phi(f+u)-\Phi(f))(t)=\int_0^t g'(f(x)+\theta(x)u(x))u(x)dx$$

On considère l'application $\begin{array}{ll}\psi_f: & E \mapsto E \\ & u \mapsto \psi_f(u)\end{array}$ tel que $\psi_f(u)(t)=\int_0^t g'(f(x))u(x)dx$. Il est clair que ψ_f est linéaire (provient de la linéarité de l'intégrale).
ψ_f est continue. En effet pour tout $u \in E$ on a

$$\begin{aligned}\|\psi_f(u) &= \sup_{t\in[0,1]} |\psi_f(u)(t)| \\ &= \sup_{t\in[0,1]} \left|\int_0^t g'(f(x))u(x)dx\right| \\ &\leq \int_0^t |g'(f(x))u(x)|\, dx \\ &\leq \|g'\circ f\|\cdot\|u\|\end{aligned}$$

Ceci montre qui ψ_f est continue.
Rappelons qu'il s'agit de montrer que

$$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \eta>0 \|u\|<\eta \Longrightarrow \|\phi(f+u)-\phi(f)\psi_f(u)\|<\varepsilon\|u\|.$$

On peut imposer à u la condition $\|u\|<1$; ainsi, lorsque $x\in[0,1]$, $f(x)+\theta(x)u(x)$ et $f(x)$ appartiennent à l'intervalle $[-\|f\|-1, \|f\|+1]$.
Puisque g est de classe c^1, alors g' est uniformement continue sur l'intervalle $[\,-\|f\|-1, \|f\|+1\,]$ qui est compact.
(c'est-à-dire $\forall\varepsilon>0\exists\alpha>0$ tel que $\|x-y\|<\alpha \Longrightarrow \|g'(x)-g'(y)\|<\varepsilon$.)
Donc $\forall\varepsilon>0\exists\alpha>0$ tel que pour tout $\|u\|<\alpha$ on ait
$\forall x\in[0,1]|f(x)+\theta(x)u(x)-f(x)|=|\theta(x)u(x)|<\|u\|<\alpha \Longrightarrow$
$|g'(f(x)+\theta(x)u(x))-g'(f(x))|<\varepsilon$.
Ainsi

$$\begin{aligned}|(\phi(f+u)-\phi(u)-\psi_f(u)\psi_f(u))\,(t)| &\leq \int_0^t |g'(f(x)+\theta(x)u(x))-g'(f(x))| \quad |u(x)|dx \\ &\leq \varepsilon\|u\|\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\|\phi(f+u)-\phi(u)-\psi_f(u)\|<\varepsilon\|u\|.$$

Ceci montre que ϕ est différentiable et sa différentielle est donnée par

$$D\phi(f)(u)(t)=\int_0^t g'(f(x)u(x)dx$$

Exercice 5

Soit E un espace de Banach. On fixe un isomorphisme u de E sur lui même ($u \in I$ som (E)) et on considère l'application $f : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ définie par $f(v) = 2v - v \circ u \circ v$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle. Que valent $f\left(u^{-1}\right)$ et $Df\left(u^{-1}\right)$?
2. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$,

$$\left\|v - u^{-1}\right\| \leq \alpha \Longrightarrow \|Df(v)\| \leq \frac{1}{2}$$

3. On fixe $v_0 \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\|v_0 - u^{-1}\| \leq \alpha$, et l'on définit par récurrence la suite $v_{p+1} = f\left(v_p\right)$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.
   Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}, \|v_p - u^{-1}\| \leq \alpha$.
   En déduire que la suite $\left(v_p\right)_p$ converge vers u^{-1} dans $\mathcal{L}(E)$.

Solution :

(1) L'application f est de classe C^1

On considère les applications suivante

$$\phi_1 : \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \mapsto \mathcal{L}(E) \\ (x, y) \mapsto x \circ u \circ y. \end{array} \quad \text{et} \quad \phi_2 : \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \mapsto \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E). \\ x \mapsto (x, x). \end{array}$$

ϕ_1 est de classe C^1 : ses composantes le sont.
ϕ_2 est de classe C^1 car c'est une application bilinéaire continue, et pour tout $(x, y) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ et $(h, k) \in \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$,

$$D\phi_2(x, y)(h, k) = \phi_2(x, k) + \phi_2(h, y) = x \circ u \circ k + h \circ u \circ y.$$

Donc l'application composée $\phi = \phi_1 \circ \phi_2$ est de classe C^1 et sa différentielle est donnée par

$$D\phi(x)(h) = D\phi_1\left(\phi_2(x)\right) \circ D\phi_2(x)(h) = D\phi_1(x, x)(h, h) = x \circ u \circ h + h \circ u \circ x.$$

Par conséquent f est de classe C^1 comme différence de deux apllications de classe C^1 : $2Id_{\mathcal{L}}(E)$: $x \mapsto x$ et l'application ϕ. Pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$ et $h \in \mathcal{L}(E)$

$$Df(v)(h) = 2h - v \circ u \circ h - h \circ u \circ v.$$

Par définition $f\left(u^{-1}\right) = u^{-1}$ et d'après la formule précédente $Df\left(u^{-1}\right) = 0$.
(2) Puisque $Df\left(u^{-1}\right) = 0$ et Df est continue, alors il existe une boule fermé B de centre u^{-1} telle que

$$\|Df(v)\| \leq \frac{1}{2} \text{ pour tout } v \in B$$

C'est-à-dire il existe $\alpha > 0$; pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$

$$\left\|v - u^{-1}\right\| \leq \alpha \Longrightarrow \|Df(v)\| \leq \frac{1}{2}.$$

(3) On pose $B = B\left(u^{-1}, \alpha\right)$ la boule de centre u^{-1} et rayon α. Puisque f est différentiable sur B et $\forall v \in B \Longrightarrow \|Df(v)\| \leq \frac{1}{2}$, le T.A.F implique que

$$\forall x, y \in B\left(u^{-1}, \alpha\right) \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \frac{1}{2}\|x - y\|.$$

En particulier

$$\forall v \in B\left(u^{-1}, \alpha\right) \quad \left\|f(v) - u^{-1}\right\| \leq \frac{1}{2}\left\|v - u^{-1}\right\|.$$

D'autr part,

$$\left\|v_0 - u^{-1}\right\| < \alpha \Longrightarrow \left\|v_1 - u^{-1}\right\| \leq \frac{1}{2}\left\|v_0 - u^{-1}\right\| < \alpha$$

Donc, par récurrence $\forall p \in \mathbb{N}\ \|v_p - u^{-1}\| < \alpha$ c'est-à-dire $v_p \in B\left(u^{-1}, \alpha\right)$.
En utilisant (*), on montre par récurrence que

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \left\|v_p - u^{-1}\right\| \leq \frac{1}{2^p}\left\|v_0 - u^{-1}\right\|.$$

Ceci montre que $\lim_{p \mapsto \infty} v_p = u^{-1}$.

Exercice 6

Soient E un evn, U un ouvert convexe de $E, \alpha > 1$ et $f : U \to E$ une application qui satisfait :

$$\forall x, y \in U, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^\alpha.$$

Montrer que f est constante.

Solution :

De l'inégaité on obtient :

$$\|f(a + h) - f(a)\| \leq \|h\|^\alpha$$

donc $\frac{\|f(a+h) - f(a)\|}{\|h\|} \leq \|h\|^{\alpha - 1} \longrightarrow 0$ quand $\|h\| \to 0$. Alors,

$$f(a + h) = f(a) + o(\|h\|)$$

f est différentiable et de différentielle nulle. Comme U est convexe, alors f est constante.

Exercice 7

Soient X et Y deux $\mathbb{R}$-espaces de Banach. On considère les espaces $E = \mathcal{L}(X, Y)$, $F = \mathcal{L}(Y, X)$ et $\Omega = I\,\mathrm{som}(X, Y)$ l'ensemble des isomorphismes de X sur Y. (On rappelle que Ω est un ouvert de E.)
On considère l'application $f : \Omega \to F = \mathcal{L}(Y, X)$ définie par $f(u) = u^{-1}$.

1. On considère l'application $\psi : E \times F \to \mathcal{L}(X, X)$ définie par $\psi(u, v) = v \circ u$. Montrer que ψ est une application bilinéaire continue.
2. Supposons que f est différentiable sur Ω.
   (a) Montrer que pour tout $u \in \Omega$ et $h \in E$: $\psi(h, f(u)) + \psi(u, Df(u).h) = 0$.
   (b) En déduire que $Df\,((u) \cdot h = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$ pour tout $u \in \Omega$ et $u \in E$.
3. Montrer que l'application f est différentiable sur Ω et donner sa différentielle.

Solution :

1. ψ est bilinéaire continue : évident.
2. Supposons que f est différentiable sur Ω.
   (a) Montrer que pour tout $u \in \Omega$ et $h \in E$: $\psi(h, f(u)) + \psi(u, Df(u).h) = 0$.

On considère l'application $\phi : \Omega \mapsto \mathcal{L}(X, X)$ définie par $\phi(u) = \psi(u, f(u))$.
Remarquons que $\phi(u) = u^{-1} \circ u = Id$ pour tout $u \in \Omega$. Donc ϕ est dfférentiable sur Ω et sa différentielle est l'application nulle $D\phi(u)(h) = 0$ pour tout $u \in \Omega$ et $h \in E$.
D'autre part $\phi = \psi \circ g$ où $g : \Omega \mapsto E \times F$ telle que $g(u) = (u, f(u))$. Les applications ψ et g sont différentiables (g est différentaible ; car ses composantes sont différentiables et $Dg(u)(h) = (h, Df(u)(h))$ pour tout $u \in \Omega$ et $h \in E$).
En calculons la différentielle de ϕ on obtient pour tout $u \in \Omega$ et $h \in E$:

$$\begin{aligned} D\phi(u)(h) &= D\psi(g(u)) \circ Dg(u)(h) \\ &= D\psi(u, f(u))(h, Df(u)(h)) \\ &= \psi(h, f(u)) + \psi(u, Df(u).h). \end{aligned}$$

D'où $\psi(h, f(u)) + \psi(u, Df(u).h) = 0$.
(b) Soit $u \in \Omega$ et $h \in E$.

D'après (a), On a $\psi(h, f(u)) + \psi(u, Df(u).h) = 0$ c'est-à-dire $Df(u).h \circ u = -f(u) \circ h$. Ceci implique que $Df(u)(h) = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$.
3. Connaissant le "candidat" pour la différentielle de f, à savoir que

$$Df(u)(h) = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1},$$

il reste à vérifier que c'est effectivement la différentielle de f en revenant à la définition. Voir le cours pour le reste de la démonstration.

Exercice 8

Soeint E un espace de Banach, $\mathrm{Isom}(E)$ le groupe des automorphismes de E (i.e. les endomorphismes bijectifs de E qui sont bicontinues) et

$$U = \{u \in \mathcal{L}(E) : id_E + u \in I\,\mathrm{som}(E)\}$$

1. Montrer que U est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.
2. Soit $k : U \to E$ l'application définie par $k(u) = (id_E + u)^{-1} \circ (id_E - u)$. Montrer que k est différentiable et donner sa différentielle.

Solution :

1. Dans le cours il est établi que $\mathrm{Isom}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$. On considère l'application $f : \mathcal{L}(E) \mapsto \mathcal{L}(E)$ définie par $f(u) = Id_E + u$.
   L'application f est continue car $\|f(u) - f(v)\| = \|u - v\|$ pour tout $u, v \in \mathcal{L}(E)$.
   Puisque $f^{-1}(\mathrm{Isom}(E)) = U$, alors U est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.
2. Posons $B : \mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ définie par $B(u, v) = u \circ v$.

Il est clair que B est bilinéaire continue, alors elle est différentiable. De plus, les application f et g définie par

$$f(u) = id_E + u, \quad \text{et} \quad g(u) = id_E - u$$

sont différentiables puisqu'elles sont deux applications affines dans $\mathcal{L}(E)$, et pour tout $u, h \in \mathcal{L}(E)$ ona

$$Df(u)(h) = h \quad \text{et} \quad Dg(u)(h) = -h.$$

On sait que l'application inverse $\phi : u \mapsto u^{-1}$ est différentiable (voir Exercice 2.0.7) et que

$$D\phi(u)(h) = -u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$$

Ainsi l'application $\psi = \phi \circ f \left(\psi(u) = (id_E + u)^{-1}\right)$ est différentiable et que

$$D\psi(u)(h) = D\psi(f(u)) \circ Df(u)(h) = D\psi\,(id_E + u)\,(h) = -\,(id_E + u)^{-1} \circ h \circ (id_E + u)^{-1}$$

pour tout $u \in U$ et $h \in \mathcal{L}(E)$.
Par ailleurs, on a $k(u) = B((\psi(u), g(u))$ pour tout $u \in U$. D'où k est différentiable est on a pour tout $u \in U$ et $h \in \mathcal{L}(E)$:

$$\begin{aligned} Dk(u)(h) &= B(D\psi(u)(h), g(u)) + B(\psi(u), Dg(u)(h)) \\ &= B\left(-\,(id_E + u)^{-1} \circ h \circ (id_E + u)^{-1}, g(u)\right) + B\left((id_E + u)^{-1}, -h\right) \\ &= -\,(id_E + u)^{-1} \circ h \circ (id_E + u)^{-1} \circ (id_E - u) + (id_E + u)^{-1} \circ (-h) \\ &= -\,(id_E + u)^{-1} \circ h \circ (id_E + u)^{-1} \circ (id_E - u) - (id_E + u)^{-1} \circ h. \end{aligned}$$

(Voir Exercie 2.0.2 pour la formule de DB).

Exercice 9

On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|_2$ et on note $B=\{e_1,\dots e_n\}$ sa base canonique. On considère une fonction $f:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ définie et continue sur la boule unité fermé $B_f(0,1)$ et telle qu'elle est de classe C^2 sur la boule ouverte $B(0,1)$. On note $S=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|_2=1\}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

1. Justifier le fait que f admet sur $B_f(0,1)$ un maximum et un minimum.
2. Supposons que f est constante sur la sphère S. Montrer que $\exists x_0\in B_f(0,1)$ tel que $Df\left(x_0\right)=0$.
3. On note $\Delta(f)=\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ le Laplacian de f.

On suppose dans cette question que $\forall x\in B(0,1)\Delta f(x)>0$ et $\exists x_0\in B(0,1)$ tel que $\forall x\in B_f(0,1): f(x)\leq f\left(x_0\right)$.
(a) Soit $i\in\{1,\dots,n\}$ et $g_i:\mathbb{R}\mapsto\mathbb{R}$ définie par $g_i(t)=f\left(x_0+te_i\right)$.

Justifier le fait que g_i est bien définie dans un voisinage U de $t=0$.
Montrer que g_i est deux dérivable sur U et que $g''{}_i(0)\leq 0$.
(b) Montrer que $\Delta f\left(x_0\right)\leq 0$.
(c) En déduire que si $\Delta f>0$ sur $B(0,1)$ alors f atteint son maximumsur $B_f(0,1)$ en un point de la sphère S.

Chapitre 3

Différentielles d'ordre supérieur-Formules de Taylor

Exercice 1

Approximations d'intégrales.
Soit $f : [a, b] \to F$ de classe $\mathcal{C}^2$ avec F un espace de Banach et $a < b$.

1. Méthode des Trapèzes : montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\left\| \int_a^b f(x)dx - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \right\| \leq C \cdot \max_{\xi \in [a,b]} \|f''(\xi)\| (b-a)^3.$$

2. Méthode du point milieu : montrer que

$$\left\| \int_a^b f(x)dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right\| \leq \frac{1}{24} \cdot \max_{\xi \in [a,b]} \|f''(\xi)\| (b-a)^3.$$

Solution :

1. Méthode des Trapèzes : montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\left\| \int_a^b f(x)dx - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \right\| \leq C \cdot \max_{\xi \in [a,b]} \|f''(\xi)\| (b-a)^3.$$

On parle de méthode de Trapèze car elle approche l'intégrale de la fonction f par celle de la fonction P définie par

$$P(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Par un calcul simple on atrouve

$$\int_a^b P(x)dx = (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Donc

$$\int_a^b f(x)dx - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} = \int_a^b f(x) - P(x)dx.$$

On note $c = \frac{a+b}{2}$ (le centre de l'intervalle $[a, b]$), et on applique la formule de Taylor avec reste intégrale à la fonction $f - P$, on obtient

$$\begin{aligned}
f(x) - P(x) &= f(c) - P(c) + D(f-P)(c)(x-c) + \int_0^1 (1-t)D^2(f-P)(c+t(x-c))(x-c)^2 dt \\
&= f(c) - P(c) + (f'(c) - P'(c))(x-c) + \int_0^1 (1-t)f''(c+t(x-c))(x-c)^2 dt \\
&= f(c) - P(c) + (f'(c) - P'(c))(x-c) + r(x), \quad (1) \qquad (1)
\end{aligned}$$

avec $r(x) = \int_0^1 (1-t)f''(c+t(x-c))(x-c)^2 dt$.

$$x = a \Longrightarrow 0 = f(a) - P(a) + (f'(c) - P'(c))(a-c) + r(a) \qquad (2)$$

$$x = b \Longrightarrow 0 = f(b) - P(b) + (f'(c) - P'(c))(b-c) + r(b) \qquad (3)$$

Remarquons que $c = \frac{a+b}{2}$, alors $a - c + b - c = 0$.
(2) + (3) donne $0 = (f(c) - P(c)) + r(a) + r(b)$. donc

$$f(c) - P(c) = -\frac{r(a)+r(b)}{2}.$$

Maintenant, l'équation (1) implique

$$f(x) - P(x) = -\frac{r(a)+r(b)}{2} + (f'(c) - P'(c))(x-c) + r(x).$$

D'où

$$\int_a^b f(x) - P(x)dx = \int_a^b r(x)dx - \frac{r(a)+r(b)}{2}(b-a) + \int_a^b (f'(c) - P'(c))(x-c)dx.$$

Comme $\int_a^b (f'(c) - P'(c))(x-c)dx = 0$, alors

$$\int_a^b f(x) - P(x)dx = \int_a^b r(x)dx - \frac{r(a)+r(b)}{2}(b-a).$$

D'autr part, f est de classe C^2, si on note $\mathrm{M} = \max_{t\in[a,b]} \|f''\|$ on obtient

$$\begin{aligned}
\|r(x)\| &= \left\| \int_0^1 (1-t) f''(c+t(x-c))(x-c)^2 dt \right\| \\
&\leq M(x-c)^2 \left| \int_0^1 (1-t) dt \right| \\
&\leq \frac{M(x-c)^2}{2}
\end{aligned}$$

Donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}
\left\| \int_a^b r(x)dx - (b-a)\frac{r(a)+r(b)}{2} \right\| &\leq \int_a^b \|r(x)\| dx + (b-a)\frac{\|r(a)\| + \|r(b)\|}{2} \\
&\leq \int_a^b \frac{M}{2}(x-c)^2 dex + \frac{b-a}{2}\left(\frac{M}{2}\left((b-c)^2+(a-c)^2\right)\right. \\
&\leq \frac{M}{6}\left[(b-c)^3-(a-c)^3\right] + \frac{M}{8}(b-a)^3 \\
&\leq M(b-a)^3\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{8}\right) \\
&\leq \frac{M(b-a)^3}{6}
\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\left\| \int_a^b f(x) - P(x)dx - (b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \right\| &\leq \frac{M(b-a)^3}{6} \\
&\leq \frac{1}{6} \max_{\xi\in[a,b]} \|f''(\xi)\| (b-a)^3
\end{aligned}$$

Par suite, on a le résultat demandé avec $c = \frac{1}{6}$.

2. Méthode du point milieu :

f est de classe C^2 donc, d'après Taylor Lagrange,

$$\|f(x+h) - f(x) - f(x)h\| \leq \frac{M}{2}\|h\|^2$$

où $M = \max_{\xi\in[x,x+h]} \|f''(\xi)\|$.
Pour $c = \frac{a+b}{2}$ on a

$$\begin{aligned}
\|f(x+h) - f(c) - Df(c)(x-c)\| &\leq \frac{M}{2}\|(x-c)\|^2 \\
\|f(x+h) - f(c) - (x-c)f'(c)\| &\leq \frac{M}{2}(x-c)^2
\end{aligned}$$

où $M = \max_{\xi\in[c,x]} \|f''(\xi)\|$.
D'autre part,

$$\int_a^b f(x) - (f(c) + (x-c)f'(c))\,dx = \int_a^b f(x) - (b-a)f(c)dx - \int_a^b (x-c)f'(c)dx$$

Donc

$$\begin{aligned}\left\|\int_a^b f(x)dx - (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right\| &\leq \int_a^b \|f(x) - f(c) - (x-xc)f'(c)\|\,dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_a^b M(x-c)^2dx, \text{ avec } M = \max_{\xi\in[a,b]}\|f''(\xi)\| \\ &\leq \frac{M}{6}\left(\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 + \left(\frac{b-a}{2}\right)^3\right). \\ &\leq \frac{M}{24}\left(\frac{b-a)^3}{8}\right. \\ &\leq \frac{1}{24}\max_{\xi\in[a,b]}\|f''(\xi)\|\,(b-a)^3.\end{aligned}$$

Exercice 2

Soit I un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, E un espace de Banach et $f : I \to E$ une application de classe $\mathcal{C}^2$. Soit $g : I \times I \to E$ une application définie par :

$$g(x,y) := \begin{cases} \frac{1}{x-y}(f(x) - f(y)) & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

1. Soit $a \in I$. Soient $(x,y) \in I^2$ avec $x \neq y$.
   (1-1) On considère l'application ϕ définie par

$$\phi(z) = \frac{1}{x-y}\left(f(z) - f(y) - (z-y)f'(a)\right).$$

Montrer que ϕ est différentiable et donner sa différentielle.
(1-2) Montrer que

$$\left\|\frac{1}{x-y}(f(x) - f(y)) - f'(a)\right\| \leq \sup_{z\in]x,y[}\|Df(z) - Df(a)\|.$$

(1-3) Montrer que g est continue sur I.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(I\times I)\backslash\Delta$, où $\Delta := \{(x,x) : x \in I\}$.
3. En supposant que g est différentiable en (a,a), montrer que $Dg(a,a)(h,k) = \frac{h+k}{2}f''(a)$ pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$.
4. Démontrer que g est différentiable en (a, a).

Solution :

1. Soit $a \in I$. Soient $(x, y) \in I^2$ avec $x \neq y$.
   (1-1) ϕ est différentiable.
   f est de classe $C^2 \Longrightarrow \phi$ est différentiable et que

$$D\phi(z)(h) = \frac{1}{x-y}(Df(z)(h) - Df(a)(h)) = \frac{1}{x-y}(Df(z) - Df(a))(h).$$

pour tout $z \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}$.
(1-2) D'après T.A.F

$$\left\| \phi(x) - \phi(y) \leq \sup_{z \in]x,y[} \right\| D\phi(z)\|.\|x-y\|.$$

Donc

$$\left\| \frac{1}{x-y}(f(x) - f(y)) - f'(a) \right\| \leq \sup_{z \in]x,y[} \|Df(z) - Df(a)\|.$$

(1-3) Montrer que g est continue sur I.

considère les applications $\begin{array}{ll} \psi_1 : & I \otimes I \mapsto E \otimes I \\ & (x,y) \mapsto \psi_1(x,y) = (f(x) - f(y), x - y). \end{array}$ $\begin{array}{ll} \psi_2 : & E \times I \mapsto E \\ & (u, \lambda) \mapsto \end{array}$

Sur $I \otimes I \backslash \Delta$, où $\Delta = \{(x, x) : x \in I\}$, l'application $g = \psi_2 \circ \psi_1$ est continue car les deux applications ψ_2 et ψ_1 sont continues sur $I \otimes I \backslash \Delta$
Maintenat, soit $(a, a) \in \Delta$.

$$\|g(x,y) - g(a,a)\| = \left\| \frac{1}{x-y}(f(x) - f(y)) - f'(a) \right\| \leq Sup_{z \in]x,y[} \|Df(z) - Df(a)\|.$$

Puisque Df est continue, alors $g(x, x) \mapsto g(a, a)$ quand $(x, y) \mapsto (a, a)$. Ce qui montre que g est continue sur I
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(I \times I)\backslash\Delta$.

Il est clair que ψ_1 et ψ_2 sont de classe C^1 sur $(I \times I)\backslash\Delta$.
Donc $g = \psi_2 \circ \psi_1$ est aussi de classe C^1 sur $(I \times I)\backslash\Delta$.
3. Supposons que g est différentiable en (a, a). Cherchons un candidat pour $Dg(a, a)$

Le fait que g est différentiable en (a, a) implique que les différentielle partielles $\frac{\partial g}{\partial x}(a, a)$ et $\frac{\partial g}{\partial y}(a, a)$ existent et on a

$$Dg(a,a)(h,k) = \frac{\partial g}{\partial x}(a,a)h + \frac{\partial g}{\delta x}(a,a)k.$$

D'autre part, on peut décomposer f' comme suite : $f' = g \circ \psi$ où
$\psi : \quad I \mapsto I \otimes I(x, y) \mapsto \psi(x) = (x, x).$
Donc on aura

$$Df'(a)h = Dg(\psi(a,a))D\psi(a)h = Dg(a,a)(ha,h) = \frac{\partial g}{\partial x}(a,a)h + \frac{\partial g}{\partial x}(a,a)h.$$

Comme g est symétrique $(g(x,y) = g(y,x))$, alors $\frac{\partial g}{\partial x}g(a,a) = \frac{\partial g}{\partial y}g(a,a)$.
Donc

$$Df'(a)h = 2\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)h. \qquad (1)$$

Puisque f est deuxx différentiable, f' est differntiable sur V_a un voisinage de a, de plus ona

$$f'(a+h) = f'(a) + Df'(a)(h) + \circ(|h|) = f'(a) + hf''(a) + \circ(|h|).$$

Donc $Df'(a)(h) = hf''(a)$.
L'éauqtion (1) implque que

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a,a)h = \frac{1}{2}hf''(a).$$

Conclusion :

$$Dg(a,a)(h,k) = \frac{h+k}{2}f''(a).$$

4. Démontrer que g est différentiable en (a, a).

Soit $X = (x,y) \in I \times I$ et posons $A = (a,a)$; on a

$$\begin{aligned} g(X) - g(A) - Dg'(A)(A-X) &= g(x,y) - g(a,a) - \frac{x-a+y-a}{2}f''(a) \\ &= \frac{1}{x-y}(f(x) - f(y)) - f'(a) - \frac{x-a+y-a}{2}f''(a). \end{aligned}$$

Notons que

$$\begin{aligned} \int_0^1 f'(x+t(y-x))dt &= \frac{1}{x-y}\int_0^1 h'(t)dt, \text{ avec } h(t) = f(x+t(x-y)) \\ &= \frac{1}{x-y}(h(1) - h(0)) \\ &= \frac{1}{x-y}(f(x) - f(y)) \end{aligned}$$

et que

$$\int_0^1 \Big(x + t(y-x)dt = \frac{x+y-2a}{2}.$$

Donc

$$g(x,y) - g(a,a) - Dg(a,a)(x-a, y-a) = \int_0^1 f'(x+t(y-x)) - f(a) - (x+t(y-x)f''(a)dt$$

Puisque f' est différentiable en a, alors

$$f'(z) - f'a) - (z-a)f''(a) = (z-a)\varphi(z-a) \quad \text{avec} \quad \lim_{z \mapsto a} \varphi(z-a) = 0.$$

(il s'agit de montrer que
$\forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0 \|(x,y) - (a,a)\| < \eta \Longrightarrow \|g(x,y) - g(a,a) - Dg(a,a)(X-A)\| < \varepsilon$)
Soit, donc, $\varepsilon > 0 \exists \eta > 0 |z-a| < \eta \Longrightarrow |\varphi(z-a)| < \varepsilon$. (2).
Soit $(x,y) \in I \times I$ tel que $\|(x,y) - (a,a)\| < \eta$ (c-à-d $|x-a| < \eta$ et $|y-a| < \eta$).
donc

$$\begin{aligned}
\left\| g(x,y) - g(a,a) - \frac{x-a+y-a}{2} f''(a) \right\| &\leq \left| \int_0^1 f'(x+t(y-x)) - f(a) - (x+t(y-x)f''(a)dt \right| \\
&\leq \left| \int_0^1 (x+t(y-x)-a)\varphi(x+t(y-x)-a)dt \right| \\
&\leq \int_0^1 |x+t(y-x)-a| \|\varphi(x+t(y-x)-a)\| dt \\
&\leq \varepsilon(|x-a| + |y-x|) \\
&\leq \varepsilon(|x-a| + |y-a| + |x-a|) \\
&\leq 2\varepsilon(|x-a| + |y-a|) \\
&\leq 2\varepsilon \|(x,y) - (a,a)\|
\end{aligned}$$

Conclusion : g est différentiable en (a, a) et

$$Dg(a,a)(h,k) = \frac{h+k}{2} f''(a)$$

Exercice 3

Soient $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et $\phi : E \to E$ l'application définie par

$$\forall f \in E, \forall x \in [0,1], \quad \Phi(f)(x) = \frac{1}{2} \int_0^x f^2(t)dt$$

1. Expliquer pouquoi $\phi(f) \in E$ pour tout $f \in E$.
2. Montrer que ϕ et différentiable et que sa différentielle, au point f, est donnée par

$$\forall h \in E, \forall x \in [0,1], \quad D\Phi(f)(h)(x) = \int_0^x f(t)h(t)dt$$

3. Montrer que ϕ est classe C^∞ et calculer $D^n\phi(f)$ pour tout $f \in E$ et $n \geq 2$.

Solution :

1. Soit $f \in E$. On a f^2 est continue sur $[0,1]$ donc elle admet une primitive F sur $[0,1]$. Ainsi, pour tout $x \in [0,1]$ on a

$$\Phi(f)(x) = \frac{1}{2}(F(x) - F(0)$$

Ceci momtre que $\phi(f) \in E$.
2. Montrons que ϕ et différentiable.

On considère l'aplication $L : E \mapsto E$, définie par $L(h)(x) = \int_0^x f(t)h(t)$ dt pour tout $x \in [0,1]$. L est linéaire (évident).
L est continue : en effet soit $h \in E$
$\|L(h)\| = \mathrm{Sup}_{x\in[0,1]} L(h)(x) = \mathrm{Sup}_{x\in[0,1]} \left|\int_0^x f(t)h(t)dt\right| \leq$
$\mathrm{Sup}_{x\in[0,1]} \int_0^x |f(t)\|h(t) \mid dt \leq \|f\|_\infty.\|h\|_\infty.$
Ce qui montre que L est application linéaire continue.
D'autre part, soit $f \in E$ et $h \in E$. Pour tout $x \in [0,1]$ on a

$$\begin{aligned}(\phi(f+h) - \phi(f) - L(h))(x) &= \frac{1}{2}\int_0^x (f+h)^2(t) - f^2(t) - 2f(t)h(t)dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^x h^2(t)dt\end{aligned}$$

Donc

$$\|\phi(f+h) - \phi(f) - L(h)\| \leq \frac{1}{2}\|h\|_\infty^2$$

Ce qui montre que ϕ est différentiable en f et que sa différentiable est $D\phi(f)(h) = L(h)$.
3. ϕ est de classe C^∞.

D'abord ϕ est différentiable et sa différentielle est $D\phi : E \mapsto \mathcal{L}(E) D\phi(f)(h) = L(h)$.
Il est clair que $D\phi$ est linéaire ; provient de linéairité de l'intégrale.

Pour tout $f \in E$ on a

$$\begin{aligned}\|D\phi(f)\| &= \sup_{h\in E,\|h\|=1} \|D\phi(f)(h)\| \\ &= \sup_{h\in E,\|h\|=1} \sup_{x\in[0,1]} |D\phi(f)(h)| \\ &\leq \sup_{h\in E,\|h\|=1} \sup_{x\in[0,1]} \left|\int_0^x f(t)h(t)dt\right| \\ &\leq \sup_{h\in E,\|h\|=1} \sup_{x\in[0,1]} \left|\int_0^1\right| f(t)\|h(t) \mid dt \\ &\leq \|f\|_\infty\end{aligned}$$

Donc $D\phi$ est linéaire continue. Ceci montre que ϕ est de classe C^∞ et on a $D(D\phi)(f) = D\phi$ et $D^n(D\phi) = 0$ pour tout $n \geq 3$.

Exercice 4

Soit E un espace de Banach, $I =]-a, a[$ (avec $a > 0$) un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une application de I vers E. Soit $y \in]0, a[$.

1. On suppose que f est de classe $\mathbb{C}^2$ et qu'il existe deux constantes positives A et B telle que, pour tout $x \in I$, $\|f(x)\| < A$, $\|f'(x)\| < B$. Montrer, en utilisant la formule de Taylor, que si $x \in [-y, y]$, $\|f'(x)\| < A/y + By$.
2. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et qu'il existe deux constantes positives M et K telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, $\left\|f^{(2n)}(x)\right\| < M(2n)!K^n$.
(a) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-y, y]$, majorer $\left\|f^{(2n+1)}(x)\right\|$.
(b) Montrer que si $y^2 K < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} f^{(n)}(0)(x, \cdots, x)$ converge sur $[-y, y]$ et a pour somme $f(x)$.

Solution :

1. Soit $x \in [-y, y]$. Utilisons la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 2 entre x et y, puis entre x et $-y$. Nous obtenons

$$\|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)\| < \frac{1}{2} B \cdot (y - x)^2$$

et

$$\|f(-y) - f(x) + f'(x)(y + x)\| < \frac{1}{2} B \cdot (y + x)^2$$

d'où

$$\begin{aligned} f(y) - f(-y) - 2f'(x)(y)\| &\leq \|f(y) - f(x) - f'(x)(y - x)\| + \|f(-y) - f(x) + f'(x)(y + x)\| \\ &\leq \frac{1}{2} B \cdot \left((y - x)^2 + (y + x)^2\right) \\ &\leq B \cdot \left(y^2 + x^2\right). \end{aligned}$$

Soit encore

$$2\|f'(x)(y)\| \leq \|f(y) - f(-y)\| + B\left(y^2 + x^2\right) \leq 2A + 2By^2.$$

Mais $\|f'(x)(y)\| = y\|f'(x)\|$ car $f'(x)$ est linéaire et $y > 0$. On obtient finalement, après division par y de l'inégalité obtenue : pour tout $x \in [-y, y]$,

$$\|f'(x)\| < A/y + By.$$

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-y, y]$. Appliquons à la fonction $f^{(2n)}$ les résultats de la question 1. Pour tout $x \in [-y, y]$, on a

$$\left\| f^{(2n+1)}(x) \right\| \leq M(2n)!K^n \left(\frac{1}{y} + (2n+1)(2n+2)Ky \right)$$

(b) On suppose que y vérifie $y^2 K < 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-y, y]$, on a

$$\left\| f^{(2n)}(0) \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right\| \leq M \left(y^2 K \right)^n$$
$$\left\| f^{(2n+1)}(0) \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right\| \leq M \left(y^2 K \right)^n + 2M(n+1) \left(y^2 K \right)^{n+1}$$

Les séries de terme général $(y^2 K)^n$ et $(n+1)\,(y^2 K)^{n+1}$ étant convergentes, la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)(x, \cdots, x)$$

est normalement convergente pour $x \in [-y, y]$; comme elle est à valeurs dans l'espace complet E, elle converge dans E. Il reste à montrer qu'elle a pour somme $f(x)$. La formule de Taylor-Lagrange appliquée à f à l'ordre p donne

$$\left\| f(x) - \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)(x, \cdots, x) \right\| \leq \begin{cases} M\,(y^2 K)^n & \text{si } p = 2n-1 \\ M\,(y^2 K)^n + 2M(n+1)\,(y^2 K)^{n+1} & \text{si } p = 2n \end{cases}$$

Dans tous les cas, le second membre a pour limite 0 quand $p \to \infty$ donc, pour tout $x \in [-y, y]$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)(x, \cdots, x)$$

Chapitre 4

Inversion locale - Fonction implicite

Exercice 1

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f'(x) \neq g'(y)$.
On considère l'application $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $F(x, y) = (x + y, f(x) + g(y))$.

1. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa différentielle.
2. Montrer que F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image.

Solution :

1. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on peut écrire $F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y))$ où
$F_1 : \quad \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ et $F_2 : \quad \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto x + y. \quad ? \quad (x, y) \mapsto f(x) + g(y).$$

il est clair que F_1 et F_1 sont de classe C^1 puisque f et g sont de classe C^1 et que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$DF_1(x, y)(h, k) = \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)k = h + k$$

et

$$DF_(x, y)\big) (h, k) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y)h + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y)k = hf'(x) + kg'(y).$$

Donc F et de classec C^1 et pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a :

$$DF(x, y)(h, k) = (h + k, hf'(x) + kg(y)) \, .$$

2. F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, montrons que $DF(a,b)$ est isomorphisme.
$DF(a,b) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ est une application linéaire. Soit $(h,k) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} DF(a,b)(h,k) = 0 &\Longleftrightarrow h + k = 0 \text{ et } hf'(a) + kg'(b) \\ &\Longleftrightarrow h = -\,\mathrm{ketk}\,(g'(b) - f'(a)) = 0 \\ &\Longrightarrow k = 0 \quad \mathrm{car}(a) \neq g'(b) \\ &\Longrightarrow h = 0. \end{aligned}$$

Ceci montre que F est injective. et puisque les espaces sont de dimensions finie, alors $DF(a,b)$ est un isomorphisme pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Pour démontrer que F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme, il suffit de montrer que F est injective. En effet soient (x,y) et (a,b) dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} f(x,y) = F(a,b) &\Longleftrightarrow x + y = a + b \text{ et } f(x) + g(y) = f(a) + g(b) \\ &\Longleftrightarrow x - a = b - y \text{ et } f(x) - f(a) = g(b) - g(y). \end{aligned}$$

D'autr part, d'après T.A.F appliqué à f et g, il existe c_1 et c_2 tel que

$$f(x) - f(a) = f'(c_1)(x-a) \text{ et } g(b) - g(y) = g'(c_2)(b-y).$$

Donc $f'(c_1)(x-a) = g'(c_2)(b-y) = g'(c_2)(x-a)$.
Puisque $f'(c_1) \neq g'(c)$, alors $x = a$ et $y = b$. et par suite F est injective. D'après le corollaire de l'inversion global, F est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Exercice 2

Montrer que le système suivant admet une solution unique dans $\mathbb{R}^2$

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4}\sin(x+y) \\ y = 1 + \dfrac{2}{3}\arctan(x-y) \end{cases}$$

Solution : Rappellons que le théorème du point fixe dit qu'une application contractante sur un espace m'etrique complet possède un point fixe.
On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = \left(\frac{1}{4}\sin(x+y), 1 + \frac{2}{3}\arctan(x-y)\right)$.
On considère les applications $\begin{aligned} \phi_1 :\ & \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \\ & (x,y) \mapsto \tfrac{1}{4}\sin(x+y). \end{aligned}$ et
$\phi_2 : \quad \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$
$(x,y) \mapsto 1 + \dfrac{2}{3}\arctan(x-y).$
Il est clair que ϕ_1 et ϕ_2 sont différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et on pour tout $(h,k) \in \mathbb{R}^2$

$$D\phi_1(x,y)(h,k) = \frac{1}{4}\cos(x+y)h + \frac{1}{4}\cos(x+y)k$$

et

$$D\phi_2(x,y)(h,k) = \frac{2}{3}\frac{1}{1+(x-y)^2}h + \frac{2}{3}\frac{-1}{1+(x-y)^2}k.$$

Donc f est aussi différentiable (car ses composantes sont diffénrentiable) et on a

$$Df(x,y)(h,k) = \left(\frac{1}{4}\cos(x+y)(h+k), \frac{2}{3}\frac{1}{1+(x-y)^2}(h-k)\right),$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$.
On considère sur $\mathbb{R}^2$ la norme $\|.\|_1$ c'est-à-dire $\|(h,k)\|_1 = |h| + |k|$. Donc pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $(h,k) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\|Df(x,y)(h,k)\| \leq \frac{1}{4}|h+k| + \frac{2}{3}|h-k| \leq \frac{11}{12}(|h|+|k|) \leq \frac{11}{12}(\|(h,k)\|.$$

Ainsi,

$$\|Df(x,y) \leq \frac{11}{12}$$

Ceci montre que f est contractante et d'après le théorème du point fixe l'équation $f(x,y) = (x,y)$ admet une soltion unique.

Remarque : Ici on a considéré la norme $\|.\|_1$.
Attention, le choix de la norme est important car, par exemple $\|Df(0,0)(1,-1)\|_\infty = \frac{4}{3}$.

Exercice 3

Soit E un espace de Banach et $\Omega = I$ som (E). On considère l'application $\phi : \Omega \to \mathcal{L}(E)$ telle que $\phi(u) = u^2 - 2u + u^{-1}$.

1. Montrer que ϕ est classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω. Déterminer sa différentielle et donner $D\phi\,(Id_E)$.
2. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert V_0 de 0 , dans $\mathcal{L}(E)$, tel que $\forall v \in V_0$ il existe $u \in \Omega$ telque

$$u^3 - 2u^2 - uv + Id_E = 0$$

Solusion :

1. ϕ est classe $\mathcal{C}^1$.

Les applications $u \mapsto u^2, u \mapsto 2u$ et $u \mapsto u^{-1}$ sont de calsse C^1 sur Ω.
Donc ϕ est classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, et pour tout $u \in \Omega$ et $h \in E$ on a :

$$D\phi(u)(h) = uh + hu - 2h - u^{-1} \circ h \circ u^{-1}$$

Pour $u = Id_E$ on a $D\phi\left(Id_E\right)(h) = 2h - 2h - h = -h$ donc $D\phi\left(Id_E\right) = -Id_E$.
2. L'application ϕ est de classe C^1 et $D\phi\left(Id_E\right) = -Id_E$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ vers $\mathcal{L}(E)$.
D'après le théorème de l'inversion local, il existe $\mathcal{U}$ voisinage de id_E dans Ω, il existe V_0 voisinage de $\phi\left(Id_E\right) = 0$ dans $\mathcal{L}(E)$ tel que $\phi : \mathcal{U} \mapsto V_0$ est diffeomorphisme.
Donc $\forall v \in V_0$ il existe $u \in \Omega$ telque $\phi(u) = v$ c'est-à-dire

$$u^3 - 2u^2 - uv + Id_E = 0$$

Exercice 4

On considère l'équation intégrale suivante, dite équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce :

$$y(t) = f(t) + \int_0^1 K(t,s)y(s)ds \tag{4.1}$$

où $f \in \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $K \in C\left([0,1]^2,\mathbb{R}\right)$ sont données et y est l'inconnue. On suppose que

$$\sup_{0\leq t\leq 1} \int_0^1 |K(t,s)|ds < 1$$

Démontrer que (4.1) possède une unique solution dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Solution :

Posons $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), k = \sup_{0\leq t\leq 1}\int_0^1 |K(t,s)|ds$ et soit $T : E \to E$ le fonctionnel défini par :

$$T(x)(t) = f(t) + \int_0^1 K(t,s)y(s)ds$$

Alors, l'équation (4.1) admet une solution si et seulement si l'opérateur T admet un point fixe. Il est connu que E muni de la norme $\|.\|_\infty$ est un espace métrique complet. Soient $x, y \in E$, alors

$$\begin{aligned}\|T(x) - T(y)\|_\infty &= \sup_{t\in[0,1]} |T(x)(t) - T(y)(t)| \\ &= \sup_{t\in[0,1]} \left|\int_0^1 K(t,s)x(s)ds - \int_0^1 K(t,s)y(s)ds\right|\end{aligned}$$

et comme $|x(s) - y(s)| \leq \|x - y\|_\infty$ pour tout $s \in [0,1]$. Alors

$$\sup_{t\in[0,1]} \left|\int_0^1 K(t,s)x(s)ds - \int_0^1 K(t,s)y(s)ds\right| \leq \left(\sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 |K(t,s)|ds\right) \|x-y\|_\infty$$

ainsi

$$\|T(x) - T(y)\|_\infty \leq k\|x - y\|_\infty$$

D'après le théorème du point fixe de Banach-Picard, T admet un unique point fixe, qui est l'unique solution de l'équation (4.1).

Exercice 5

Soit E un espace de Banach. On note $I_E : x \to x$ l'application identité de E.
On considère l'application $\phi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ définie par $\phi(u) = u \circ u$ pour $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{L}(E)$ et calculer sa différentielle.
2. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\|v - I_E\| < \alpha$, l'équation $u \circ u = v$ possède une solution dans $\mathcal{L}(E)$.
3. On suppose que $E = \mathbb{R}^2$, et on considère les éléments u et h de $\mathcal{L}(E)$ dont les matrices dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont respectivement :

$$M_u = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3-a. Calculer $D\phi(u).h$
3-b. En déduire qu'il n'existe pas de fonction différentiable $\psi : \mathcal{W}_I \to \mathcal{W}_u$, où $\mathcal{W}_I$ est un voisinage de I_E et $\mathcal{W}_u$ voisiange de u dans $\mathcal{L}(E)$, telle que

$$\psi(I_E) = u \quad \text{et} \quad \psi(w) \circ \psi(w) = w \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad w \in \mathcal{W}_I.$$

Splution :

(1) L'application ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{L}(E)$ comme composée de deux applications :
$\phi_1 : u \mapsto (u, u)$ (qui est de classe $\mathcal{C}^1$ car ses composantes sont $I_{\mathcal{L}(E)}$ de classe $\mathcal{C}^1$) et de
$\phi_2 : (u, v) \mapsto u \circ v$ qui bilinéiare continue donc de classe $\mathcal{C}^1$. D'après la formule de différentiation des fonctions composées on a :

$$D\phi(u)(h) = u \circ h + h \circ u$$

pour tout $h \in \mathcal{L}(E)$ et $h \in \mathcal{L}(E)$.
(2) D'après la formule ci-dessus, $D\phi(I_E)(h) = 2h$ pour tout $h \in \mathcal{L}(E)$. Donc $D\phi(I_E) = 2I_{\mathcal{L}(E)}$, c'est un isomorphisme. Donc d'après le théorème d'inversion locale, ϕ est un difféomorphisme local en I_E, c'est-à-dire il existe un voisinage U de I_E et un voisinage V de $\phi(I_E) = I_E$ tels que, pour tout $v \in V$ il existe un unique $u \in U$ tel que $\phi(u) = v$.
En prenant $\varepsilon > 0$ tel que la boule $B(I_E, \varepsilon)$, de centre I_E et de rayon ε, soit incluse dans V, on en déduit que pour tout $v \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\|v - I_E\| < \varepsilon$, l'équation $u \circ u = v$ possède au moins une solution dans $\mathcal{L}(E)$ (et en fait une seule dans U).
3-a. Par un calcul simple, on peut voir que le les matrice M_u et M_u satisfont $M_u \cdot M_h = M_h \cdot M_u$. Donc

$$D\phi(u) \cdot (h) = 0.$$

3-b. Supposons, par l'absurde, qu'il existe une fonction différentiable $\psi : \mathcal{W}_I \to \mathcal{W}_u$, où $\mathcal{W}_I$ est un voisinage de I_E et $\mathcal{W}_u$ voisiange de u dans $\mathcal{L}(E)$, telle que

$$\psi\left(I_E\right) = u \quad \text{et} \quad \psi(w) \circ \psi(w) = w \quad \text{pour} \quad \text{tout} \quad w \in \mathcal{W}_I.$$

C'es-à-dire $\phi \circ \psi(\omega) = \omega$ pour tout $\omega \in \mathcal{W}_I$.
Donc, par la différentiation de l'application $\omega \mapsto \phi \circ \psi(\omega) - \omega$, on obtient

$$D\phi\left(\psi\left(I_E\right)\right) \circ D\psi\left(I_E\right)(k) = D\phi(u) \circ D\psi\left(I_E\right)(k) = k$$

pour tout $k \in \mathcal{L}(E)$. Donc $D\psi\left(I_E\right)$ serait injective. En effet, pour tout $k \in \mathcal{L}(E)$

$$\begin{aligned} D\psi\left(I_E\right)(k) = 0 &\Longrightarrow D\phi\left(\psi\left(I_E\right)\right) \circ D\psi\left(I_E\right)(k) = 0 \\ &\Longrightarrow \quad k = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent $D\psi\left(I_E\right)$ est bijective car $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie.
En choisissant K tel que $D\psi\left(I_E\right)k = h$, on en déduit que

$$D\phi(u)(h) = k.$$

Donc $k = 0$ (car $D\phi(u)(h) = 0$), ainsi $h = 0$ ce qui est évidemment faux.

Exercice 6

Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme
$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|$.
On considère l'application $F : E \to E$ définie par :

$$\forall f \in E \quad \forall x \in [0,1] \quad F(f)(x) = \int_0^x f^2(t)dt$$

1. Montrer que l'application F est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Montrer que $\forall f, g \in E$, on a $\|DF(f) - Df(g)\| \le 2\|f - g\|$.

En déduire que l'application F est de classe $\mathcal{C}^1$.
3. Montrer que : $\forall f, g \in B : \|F(f) - F(g)\|_\infty \le 2\|f - g\|_\infty$ où $B = \{f \in E / \| f\|_\infty < 1\}$ la boule unité ouverte de E.
4. On pose $\phi = I + \frac{1}{2}F$, où $I : x \mapsto x$ l'application identité de E.
(a) Montrer que $D\phi(f)$ est inversible pour tout $f \in B$.
(b) Montrer que ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de la boule B sur son image.

Solution :

1. Soit $f \in E$. Pour $h \in E$ et $x \in [0,1]$ On a

$$\begin{aligned}(F(f+h)-f(f))(x) &= \int_0^x (f+h)^2(t) - f^2(t)dt\\ &= 2\int_0^x f(t)h(t)dt + \int_0^x h^2(t)dt\\ &= L(h)(x) + F(h)(t)dt\end{aligned}$$

Où $L : E \mapsto E$ est une application définie par $L(h)(x) = 2\int_0^x f(t)h(t)dt$ pour tout tout $h \in E$ et $x \in [0,1]$.
Il est clair que L est linéaire et elle est continue. En effet pour tout $h \in E$ on a
$\|L(h)\| = \sup_{x\in[0,1]} |L(h)(x)| \leq 2\sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |f(t)h(t)|dt \leq 2\sup_{x\in[0,1]} \int_0^1 |f(t)h(t)|dt \leq \|f\|\|h\|$.
Par ailleurs, on a $\|F(h)\| \leq \|h\|^2$, de sorte que $F(f+h) - F(f) - L(h) = \circ(\|h\|)$. Et par suite F est différentiable et sa différentielle est donnée par

$$DF(f)(h)(x) = 2\int_0^x f(t)h(t)dt$$

2. Soient $f, g \in E$, on a

$$\begin{aligned}\|DF(f) - DF(g)\| &= \sup_{h\in E,\|h\|=1} \|DF(f)(h) - DF(g)(h)\|\\ &= 2\sup_{h\in E,\|h\|=1}\left(\sup_{x\in[0,1]}\left|\int_0^x (f(t)-g(t))h(t)dt\right|\right)\\ &\leq 2\sup_{h\in E,\|h\|=1}\left(\sup_{x\in[0,1]}\int_0^x |(f(t)-g(t))h(t)|dt\right)\\ &\leq 2\sup_{h\in E,\|h\|=1} \|f-g\|\|h\|.\\ &\leq 2\|f-g\|\end{aligned}$$

On en déduit que DF est Lipschitzienne, et par suite continue.
Conclusion F est de classe C^1.
3. En posant dans $2g = 0$, on ontient $\|DF(f)\| \leq 2\|f\|$ pour tout $f \in E$. En particulier, $DF(f) \leq 2$ pour tout $f \in B$.
Puisque F est différentiable et B est convexe, alors d'après T.A.F, pour tout $f, g \in B$

$$\|F(f) - F(g)\| \leq \sup_{h\in[f,g]} \|DF(h)\|\|f-g\| \leq 2\|f-g\|$$

4. On pose $\phi = I + \frac{1}{2}F$.
   (a) Montrer que $D\phi(f)$ est inversible pour tout $f \in B$.

D'abdord ϕ est de classe C^1 en tant que somme de deux applications de classe C^1 et $D\phi(f) = I + \frac{1}{2}DF(f)$ pour tout $f \in E$ D'où, d'après 2, $\|D\phi(f) - I\| = \frac{1}{2}\|DF(f)\| \leq \|f\|$ pour tout $f \in E$.
Ainsi, pour tout $f \in B$, $\|D\phi(f) - I\| < 1$. Ceci montre que $D\phi(f)$ est inversible.
(b) Montrer que ϕ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de la boule B sur son image.

Pour $f \in B$, on a $D\phi(f)$ est inversible. D'après le Théorème d'inversion local, il existe un voisinage ouvert U de f dans B tel que $\phi_{/U}$ est un C^1-difféomorphisme. D'où ϕ est un C^1-difféomorphisme

local. Pour, montrer que ϕ est un C^1 difféomorphisme de la boule ouverte B sur son image $\phi(B)$, il suffit de montrer que ϕ est injective. En effet, Soient alors $f, g \in B$ tels que $\phi(f) = \phi(g)$ c'est-à-dire $F(f) - F(g) = 2(f - g)$.
Donc $\|F(f) - F(g)\| = 2\|f - g\|$. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, on trouve

$$\|f - g\| = \|F(f) - F(g)\| \leq \sup_{h \in [f,g]} \|DF(h)\|\|f - g\|$$

Supposons que $f \neq g$. Alors on trouve $\sup_{h \in [f,g]} \|DF(h)\| = 2$.
Mais $[f, g]$ étant compact, il existe $h \in [f, g]$ tel que $\|DF(h)\| = 2$, ceci est absurde car $\|DF(h)\| \leq \|h\| < 2$ pour tout $h \in B$.
D'où $f = g$ et par suite ϕ est injective.
On en déduit que ϕ est un C^1-difféomorphisme de la boule ouverte B sur son image $\phi(B)$.

Exercice 7

On considère le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x^3 + y^3 + z^3 + t^2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 + t = 2 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

1. Vérifier que le point $(0, -1, 1, 0)$ est une solution du système.

Montrer que l'on peut résoudre ce système par rapport à (x, y, z) au voisinage de ce point.
2. Calculer la dérivée en 0 de la fonction $t \mapsto (x(t), y(t); z(t))$.

Solution :

1. Il est facile de vérifier que le point ($0, -1, 1, 0$) est une solution du système (S).

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par

$$f((x, y, z), t) = \left(x^3 + y^3 + z^3 + t^2, x^2 + y^2 + z^2 + t - 2, x + y + z + t\right).$$

Il est clair que f est de classe C^1 et que $f((0, -1, 1), 0) = (0, 0, 0)$.
La matrice Jacobienne de sa différentielle partielle $f'_M(M, t)$ par rapport à sa première variable $M = (x, y, z)$ est

$$\begin{pmatrix} 3x^2 & 3y^2 & 3z^2 \\ 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En particulier, $D_1 f((0, -1, 1), 0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, dont le déterminat est $12 \neq 0$.

D'après le Théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage I de 0 dans $\mathbb{R}$, un voisinage V de $(0,-1,1)$ dans $\mathbb{R}^3$ et une application $\psi : I \mapsto V$ de classe C^1 tels que

$$\forall((x,y,z),t) \in V \times I, \quad f((x,y,z),t) = f((0,-1,1),0) \Longleftrightarrow (x,y,z) = \psi(t).$$

c'est-à-dire $\forall t \in I (x(t), y(t), z(t))$ est une solution du système (S) ; où $(x(t), y(t), z(t)) = \psi(t)$.
2. Par le théorème des fonctions implictes

$$\psi'(t) = -D_1 f(0,-1,1,0)^{-1} \cdot D_2 f(0,-1,1,0);$$

où $D_2 f(0,-1,1,0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\psi'(0) = -\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 8

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y,z) = x^2 y + e^x + z$$

1. Vérifier que $f(0,1,-1) = 0$.

Montrer qu'il existe un voisinage V de $(-1,1)$ dans $\mathbb{R}^2$ et une fonction $\phi : V \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1 tels que $\phi(1,-1) = 0$ et $f(\phi(y,z), y, z) = 0$ pour tout $(y,z) \in V$.
2. Calculer $D\phi(1,-1)$.

Solution : (1) Il est facile de vérifier que $f(0,1,-1) = 0$.
On a $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,-1) = 1 \neq 0$. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage V de $(-1,1)$ dans $\mathbb{R}^2$, un voisinage I de 0 dans $\mathbb{R}$ et une appliaction $\phi : V \mapsto I$ de classe C^1 tels que
$\forall(x,(y,z)) \in I \times V \quad f(x,y,z) = f(0,1,-1) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \phi(y,z)$,
ou en d'autre termes $f(\phi(y,z), y, z) = 0$ pour tout $(y,z) \in V$. (2) Calculer $D\phi(1,-1)$. D'après théorème de la fonction implicite, on a
$D\phi(1,-1) = -\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,1,-1)\right)^{-1} D_1 f(0,1,-1)$ où $D_1 f(0,1,-1)$ est la différentielle partielle de f relativement aux coordonnées y et z, i.e elle est représentéepar le vecteur
$\binom{\frac{\partial f}{\partial y}(0,1,-1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(0,1,-1)} = \binom{0}{1}$.
On en déduit que $D\phi(1,-1) : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ est l'application linéaire représentée par le vecteur $(0,-1)$ relativement aux bases canoniques, c'est-à-dire $D\phi(1,-1)(t) = (0,-t)$ pour tout t