الكلية متعددة التخصصات تازة
FACULTÉ POLYDISCIPLINAIRE DE TAZA

جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES

Travaux dirigés d'Intégration

Filière : SMA, S5

Prof. Yazough Chihab

Année universitaire : 2025/2026

Table des matières

Chapitre 1

Tribus et applications mesurables

Table des matières

Exercice 1

a. Soit X un ensemble et $A_1, \ldots, A_n$ une partition finie de X. Décrire la tribu engendrée par $A_1, \ldots, A_n$. Quel est son nombre d'éléments ?
b. Soit X un ensemble et $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une partition de X. Décrire la tribu engendrée par $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Montrer qu'elle est équipotente à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Solution :

a. Considérons $\mathcal{T} = \{\cup_{j\in J} A_j\}_{J\subset\{1,\ldots,n\}}$. Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $A_j \in \mathcal{T}$ et toute tribu à laquelle les A_j appartiennent doit contenir $\mathcal{T}$; de plus $\mathcal{T}$ est une tribu, car stable par réunion, passage au complémentaire car les A_j forment une partition de X et donc

$$(\cup_{j\in J} A_j)^c = \cup_{j\in J^c} A_j.$$

En outre $X = \cup_{1\leq j\leq n} A_j \in \mathcal{T}$. Comme les A_j forment une partition de X, il y a une bijection entre les sous-ensembles J de $\{1, \ldots, n\}$ et $\mathcal{T}$. Par suite $\operatorname{Card}\mathcal{T} = 2^n$.
b. Considérons $\mathcal{T} = \{\cup_{j\in J} A_j\}_{J\subset\mathbb{N}}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $A_j \in \mathcal{T}$ et toute tribu à laquelle les A_j appartiennent doit contenir $\mathcal{T}$; de plus $\mathcal{T}$ est une tribu, car stable par réunion, passage au complémentaire car les A_j forment une partition de X et donc

$$(\cup_{j\in J} A_j)^c = \cup_{j\in J^c} A_j.$$

En outre $X = \cup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{T}$. Comme les A_j forment une partition de X, il y a une bijection entre les sous-ensembles J de $\mathbb{N}$ et $\mathcal{T}$: l'application

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \ni J \mapsto \cup_{j\in J} A_j \in \mathcal{T}$$

est surjective par construction de $\mathcal{T}$. Elle est injective car si J, K sont des parties de $\mathbb{N}$ telles que

$$\cup_{j\in J} A_j = \cup_{k\in K} A_k$$

on obtient pour $j_0 \in J, A_{j_0} = A_{j_0} \cap (\cup_{j\in J} A_j) = A_{j_0} \cap (\cup_{k\in K} A_k) = \emptyset$ si $j_0 \notin K$. Comme $A_{j_0} \neq \emptyset$, il vient $J \subset K$ et de même $K \subset J$ i.e. $J = K$. Par suite, on peut écrire symboliquement que $\operatorname{Card} \mathcal{T} = 2^{\aleph_0}$, car nous avons démontré que $\mathcal{T}$ est équipotent à $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exercice 2

Soit X un ensemble et $\mathcal{M}$ une tribu dénombrable sur X .
a. Montrer que pour tout $x \in X$, l'intersection $A(x)$ des éléments de $\mathcal{M}$ qui contiennent x est encore élément de $\mathcal{M}$.
b. Montrer que pour $x, x' \in X$, soit $A(x) \cap A(x') = \emptyset$, soit $A(x) = A(x')$.
c. Montrer que $\mathcal{M}$ est la tribu engendrée par une partition dénombrable. En déduire en utilisant l'exercice précédent que $\mathcal{M}$ est finie.

Solution :

a. $A(x)$ est une intersection dénombrable (car $\mathcal{M}$ est dénombrable) d'éléments de $\mathcal{M}$, et donc est élément de $\mathcal{M}$.
b. Considérons x, x' des éléments de X. Si $x \in A(x')$, on a $A(x) \subset A(x')$ et donc $A(x) = A(x') \cap A(x)$. Par conséquent si $x \in A(x')$ et $x' \in A(x)$, on obtient

$$A(x) = A(x') \cap A(x) = A(x') .$$

Si $x \notin A(x')$ alors $A(x')^c$ est un élément de $\mathcal{M}$ qui contient x et par suite $A(x) \subset A(x')^c$, ce qui implique $A(x) \cap A(x') = \emptyset$ (et le même résultat si $x' \notin A(x)$).
c. Considérons l'ensemble

$$\mathcal{N} = \{B \subset X, \exists x \in X, B = A(x)\} :$$

c'est un sous-ensemble de $\mathcal{M}$ et il est donc dénombrable. Par ailleurs, d'après la question b, si $B \neq B' \in \mathcal{N}$, on a $B \cap B' = \emptyset$. En notant, avec D dénombrable, $\mathcal{N} = \{B_k\}_{k\in D}$, on trouve que $\mathcal{N}$ est une partition de X. En effet, si $X \neq \emptyset$ (si $X = \emptyset, \mathcal{M} = \{\emptyset\}$) aucun B_k n'est vide, $B_k \cap B_l = \emptyset$ pour $k \neq l \in D$ et $\cup_{k\in D} B_k = X$ car pour $x \in X$, il existe $k \in D$, tel que $A(x) = B_k$. La tribu $\mathcal{M}$ contient donc la tribu engendrée par $\mathcal{N}$, qui est non dénombrable si D est infini . Par suite, D est fini ainsi que la tribu engendrée par $\mathcal{N}$. De plus si $C \in \mathcal{M}$, on a

$$C = \cup_{x\in C} A(x)$$

car, pour $x \in C, C \supset A(x)$ et $x \in A(x)$; par conséquent, C est réunion, nécessairement dénombrable, d'éléments de $\mathcal{N}$. La tribu $\mathcal{M}$ est donc la tribu engendrée par $\mathcal{N}$, qui est finie.

Exercice 3

Montrer que la tribu des boréliens sur $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles du type $[a, +\infty[$. Même question avec les intervalles du type $]a, +\infty[$. Même question avec les intervalles du type $]-\infty, a]$ et ceux du type $]-\infty, a[$.

Solution :

Voir les notes du cours.

Exercice 5

Soit ($X, \mathcal{M}$) un espace mesurable et $f_n : X \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables. Montrer que l'ensemble

$$A = \left\{x \in X, \text{ la suite } (f_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente } \right\}$$

est élément de $\mathcal{M}$.

Solution :

Corrigé. On a en utilisant le critère de Cauchy,

$$A = \{x \in X, \forall \epsilon \in \mathbb{Q} \cap]0, 1], \exists N, \forall n \geq N, \forall k \geq 0, |f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq \epsilon\}$$

et par suite

$$A = \bigcap_{\epsilon\in\mathbb{Q}\cap]0,1]} \left[\bigcup_{N\in\mathbb{N}} \left(\cap_{n\geq N, k\geq 0} \{x \in X, |f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq \epsilon\}\right) \right].$$

La mesurabilité des fonctions f_n assure que l'ensemble $\{x \in X, |f_{n+k}(x) - f_n(x)| \leq \epsilon\}$ est élément de $\mathcal{M}$. L'ensemble A est donc une intersection dénombrable de réunion dénombrable d'intersection dénombrable d'éléments de $\mathcal{M}$: c'est un élément de $\mathcal{M}$.

Exercice 6

Soient ($X, \mathcal{M}$) un espace mesurable et $A \subset X$. Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}_A = \{M \cap A\}_{M\in\mathcal{M}}$ est une tribu sur A, rendant l'injection canonique mesurable. Montrer que si en outre $A \in \mathcal{M}, \mathcal{M}_A = \{M \in \mathcal{M}, M \subset A\}$.

Solution :

$\mathcal{M}_A$ est stable par réunion dénombrable, contient $A = X \cap A$, et est stable par passage au complémentaire car, en notant B^c le complémentaire dans X, pour $M \in \mathcal{M}$,

$$(M \cap A)^c \cap A = (M^c \cup A^c) \cap A = M^c \cap A.$$

L'injection canonique ι est mesurable car, pour $M \in \mathcal{M}$, on a $\iota^{-1}(M) = M \cap A$. Le dernier point est trivial.

Exercice 7

Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$. Montrer que les ensembles suivants sont mesurables

$$A = \left\{x \in X, \lim_{n\to+\infty} u_n(x) = +\infty\right\}, \quad B = \left\{x \in X, \text{ la suite } (u_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée } \right\}.$$

solution

On a $A = \{x \in X, \forall m \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, u_n(x) \geq m\}$, de sorte qu'en posant

$$A_{n,m} = \{x \in X, u_n(x) \geq m\},$$

il vient $A = \cap_{m\in\mathbb{N}} \left(\cup_{N\in\mathbb{N}} \left(\cap_{n\geq N} A_{n,m}\right)\right)$ qui est mesurable car chaque $A_{n,m}$ l'est. De manière analogue, on a $B = \{x \in X, \exists m \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, |u_n(x)| \leq m\} = \cup_{m\in\mathbb{N}} \left(\cap_{n\in\mathbb{N}} B_{n,m}\right)$, avec $B_{n,m} = \{x \in X, |u_n(x)| \leq m\}$.

Exercice 8

Soient X, Y deux espaces métriques et soit $f : X \to Y$, une application dont l'ensemble des points de discontinuité est dénombrable. Montrer que f est mesurable (X, Y sont munis de leur tribu borélienne).

solution

Corrigé. Soit D l'ensemble des points de discontinuité de f. L'application $F : X\backslash D \to Y$ définie par $F(x) = f(x)$ est continue. Soit V un ouvert de Y. On a

$$\begin{aligned} f^{-1}(V) = \{x \in X, f(x) \in V\} &= \{x \in X\backslash D, f(x) \in V\} \cup \left(f^{-1}(V) \cap D\right) \\ &= F^{-1}(V) \cup \left(f^{-1}(V) \cap D\right) = (U \cap (X\backslash D)) \cup \left(f^{-1}(V) \cap D\right), \end{aligned}$$

où U est un ouvert de X. Or D est mesurable comme réunion dénombrable de points. Par suite, $U \cap D^c$ est mesurable. De plus, $f^{-1}(V) \cap D$ est dénombrable, donc mesurable. Finalement, $f^{-1}(V)$ est mesurable donc f est mesurable.

Chapitre 2

Mesures positives

Exercice 1

Soit X un ensemble et μ la mesure de comptage définie sur $\mathcal{P}(X)$ par $\mu(A) = \mathrm{Card}\, A$ si A est fini, $\mu(A) = +\infty$ sinon. Montrer que $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ est un espace mesuré.

Solution :

Soit $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de X, deux à deux disjointes. Si $\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ est un ensemble fini, alors il existe N tel que $A_j = \emptyset$ pour $j > N$; par suite $\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \cup_{0\leq j\leq N} A_j$ et les A_j sont finis deux à deux disjoints.
On obtient bien

$$\mu\left(\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = \mathrm{Card}\left(\cup_{0\leq j\leq N} A_j\right) = \sum_{0\leq j\leq N} \mathrm{Card}\left(A_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Card}\left(A_j\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu\left(A_j\right).$$

Si $\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ est un ensemble infini, on a $\mu\left(\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) = +\infty$. Vérifions que $\sum_{j\in\mathbb{N}} \mu\left(A_j\right) = +\infty$. Si l'un des ensembles A_j est infini, c'est vrai. Si tous les A_j sont finis, on ne peut avoir $M = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{Card}\left(A_j\right) < +\infty$. En effet, cela impliquerait

$$\mathrm{Card}\left(\cup_{0\leq j\leq n} A_j\right) = \sum_{0\leq j\leq n} \mathrm{Card}\left(A_j\right) \leq M,$$

et par conséquent $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Card}\left(\cup_{0\leq j\leq n} A_j\right) \leq M$. Or, comme l'ensemble $\cup_{j\in\mathbb{N}} A_j$ est infini, la suite $\left(\mathrm{Card}\left(\cup_{0\leq j\leq n} A_j\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

Exercice 2

Soit $(X, \mathcal{M})$ un espace mesurable et $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures positives définies sur $\mathcal{M}$. Montrer que $\sum_{k\geq 0} \mu_k$ définit une mesure positive sur $\mathcal{M}$.

Solution :

En posant, pour $A \in \mathcal{M}, \mu(A) = \sum_{k \geq 0} \mu_k(A)$, on voit que $\mu(\emptyset) = 0$. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{M}$ d'ensembles deux à deux disjoints, on a,

$$\mu\left(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_k\left(\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_k\left(A_n\right)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu_k\left(A_n\right)\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu\left(A_n\right), \text{ qed.}$$

Exercice 3

Soit ($X, \mathcal{M}, \mu$) un espace mesuré où μ est une mesure positive telle que $\mu(X) = 1$. On considère

$$\mathcal{T} = \{A \in \mathcal{M}, \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = 1\}$$

Montrer que $\mathcal{T}$ est une tribu sur X.

Solution :

Vérifions les axiomes d'une tribu. - On a $\mu(\varnothing) = 0$ et $\mu(X) = 1$, donc $\varnothing$ et X sont éléments de T.
- Soit $A \in T$. Alors $\mu\left(A^c\right) = 1 - \mu(A) \in \{0, 1\}$, et donc $A^c \in T$.
- Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de T. Distinguons deux cas :
- ou bien $\mu\left(A_n\right) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$0 \leq \mu\left(\bigcup_n A_n\right) \leq \sum_n \mu\left(A_n\right) = 0$$

- ou bien il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mu\left(A_k\right) = 1$. Alors

$$\mu\left(\bigcup_n A_n\right) \geq \mu\left(A_k\right) = 1$$

et donc $\mu\left(\bigcup_n A_n\right) = 1$ puisque μ est une mesure de probabilité. Dans tous les cas, $\bigcup_n A_n \in T$.

Exercice 4

Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{M}$ la tribu engendrée par les parties $\{x\}$ où $x \in X$.
a. Montrer que $A \in \mathcal{M}$ si et seulement si A est dénombrable ou bien A^c est dénombrable.
b. Si X n'est pas dénombrable, on pose pour $A \in \mathcal{M}$

$$\begin{aligned} &\mu(A) = 0, \quad \text{si } A \text{ est dénombrable,} \\ &\mu(A) = 1, \quad \text{si } A \text{ n'est pas dénombrable.} \end{aligned}$$

Montrer que μ est une mesure positive définie sur $\mathcal{M}$.

solution :

Si A est une partie dénombrable de X, A est réunion dénombrable d'ensembles à un élément et appartient donc à $\mathcal{M}$. Comme $\mathcal{M}$ est aussi stable par passage au complémentaire, on trouve également que si A^c est dénombrable, $A \in \mathcal{M}$. Considérons

$$\mathcal{N} = \{A \subset X, A \text{ ou } A^c \text{ est dénombrable }\}.$$

Nous venons de démontrer que $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$. Par ailleurs $\mathcal{N}$ est stable par passage au complémentaire, contient X et toutes les parties à un élément. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{N}$. Si tous les A_n sont dénombrables, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dénombrable et donc est élément de $\mathcal{N}$. S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que A_k soit non dénombrable, alors A_k^c est dénombrable et comme

$$(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \subset A_k^c$$

on obtient que $(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c$ est dénombrable et donc $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{N}$. L'ensemble $\mathcal{N}$ est donc une tribu qui contient toutes les parties à un élément de X. On obtient donc que $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$ et par suite $\mathcal{M} = \mathcal{N}$. Ceci achève la démonstration de (a). On a $\mu(\emptyset) = 0$; soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{M}$. Si tous les A_n sont dénombrables, alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est dénombrable et

$$\mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 0 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right)$$

S'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que A_k soit non dénombrable, alors A_k^c est dénombrable et $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est non dénombrable. Comme

$$A_k^c \supset \cup_{n\neq k} A_n$$

A_n est dénombrable pour $n \neq k$ et $\mu\left(A_n\right) = 0$ pour $n \neq k$. Par suite

$$\mu\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1 = \mu\left(A_k\right) = \mu\left(A_k\right) + \sum_{n\in\mathbb{N}, n\neq k} \mu\left(A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu\left(A_n\right), \quad \text{qed.}$$

Exercice 7

Soit ($X, \mathcal{M}, \mu$) un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ deux applications. Montrer que

$$(g \circ f)_*(\mu) = g_*\left(f_*(\mu)\right)$$

Solution :

La mesure image $f_*(\mu)$ est définie sur la tribu $\mathcal{N} = \{B \subset Y, f^{-1}(B) \in \mathcal{M}\}$ dans les notes de cours par

$$f_*(\mu)(B) = \mu\left(f^{-1}(B)\right).$$

La mesure image $g_*\left(f_*(\mu)\right)$ est définie sur la tribu

$$\mathcal{T} = \left\{C \subset Z, g^{-1}(C) \in \mathcal{N}\right\} = \left\{C \subset Z, f^{-1}\left(g^{-1}(C)\right) \in \mathcal{M}\right\} = \left\{C \subset Z, (g \circ f)^{-1}(C) \in \mathcal{M}\right\}$$

par

$$g_*\left(f_*(\mu)\right)(C) = f_*(\mu)\left(g^{-1}(C)\right) = \mu\left(f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right)\right) = \mu\left((g \circ f)^{-1}(C)\right).$$

Par conséquent les mesures $g_*\left(f_*(\mu)\right)$ et $(g \circ f)_*(\mu)$ coïncident sur la tribu $\mathcal{T}$.

Exercice 8

On note $\mathcal{B}$ la tribu de Borel sur $\mathbb{R}$ et on considère une mesure positive μ définie sur $\mathcal{B}$ et finie sur les compacts. Pour $a \in \mathbb{R}$, on définit

$$F_a(t) = \begin{cases} \mu([a, t[) & \text{si } t > a, \\ -\mu([t, a[) & \text{si } t \leq a. \end{cases}$$

Montrer que F_a est croissante et continue à gauche.

Solution :

Soient $s < t$ des réels. Pour $s > a$, on a $[a, s\,[\subset [a, t\,[$ et donc $F_a(s) = \mu([a, s[) \leq \mu\left([a, t[\right) = F_a(t)$. Pour $s \leq a < t$, on a $F_a(s) = -\mu\left([s, a[\right) \leq 0 \leq \mu\left([a, t[\right) = F_a(t)$. Pour $s < t \leq a$, on a $[t, a\,[\subset [s, a\,[$ et donc $F_a(s) = -\mu\left([s, a[\right) \leq -\mu\left([t, a[\right) = F_a(t)$. La fonction F_a est donc croissante. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $t_0 > a$ et soit $(t_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de limite t_0. On a

$$[a, t_0\,[= \cup_{n \geq 1}\,[a, t_n]$$

et en utilisant la proposition , il vient

$$F_a\left(t_0\right) = \mu\left(\left[a, t_0[\right) = \lim_{n \to \infty} \mu\left([a, t_n]\right) = \lim_{n \to \infty} F_a\left(t_n\right)$$

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $t_0 \leq a$ et soit $(t_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de limite t_0. On a

$$[t_0, a\,[= \cap_{n \geq 1}\,[t_n, a[$$

et en utilisant la proposition

$$\mu\left([t_1, a[\right) \leq \mu\left([t_1, a]\right) < +\infty \tag{2.1}$$

il vient

$$F_a\left(t_0\right) = -\mu\left(\left[t_0, a[\right) = -\lim_{n \to \infty} \mu\left(\left[t_n, a[\right) = \lim_{n \to \infty} F_a\left(t_n\right)$$

Exercice 9

Soit X un ensemble. On appelle mesure extérieure sur X une application

$$\mu^* : \mathcal{P}(X) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$$

telle que
(i) $\mu(\emptyset) = 0$,
(ii) $A \subset B \subset X$ implique $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (monotonie),
(iii) $\mu^*\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*\left(A_n\right)$ (sous-additivité dénombrable).
Montrer que μ^* définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ par

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} (b_j - a_j) \right\}$$

où $\cup_{j\in\mathbb{N}}]\, a_j, b_j [$ parcourt les recouvrements ouverts de A, est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}$.

solution

Les propriétés (i) et (ii) sont immédiates. Montrons (iii). Soient $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{R}$. On peut supposer que tous les $\mu^*\left(A_n\right)$ sont finis, sinon (iii) est vérifié trivialement. Soit $\epsilon > 0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on considère une famille dénombrable d'intervalles ouverts bornés $(I_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$A_n \subset \cup_{k\in\mathbb{N}} I_k^n, \quad \mu^*\left(A_n\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} |I_k^n| < \mu^*\left(A_n\right) + \epsilon 2^{-n-1}$$

où l'on a noté $|I_k^n|$ la longueur de l'intervalle I_k^n. On a alors

$$\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \subset \cup_{n,k\in\mathbb{N}} I_k^n$$

et par conséquent

$$\mu^*\left(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n,k\in\mathbb{N}} |I_k^n| = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |I_k^n| \right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\mu^*\left(A_n\right) + \epsilon 2^{-n-1} \right) = \epsilon + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*\left(A_n\right),$$

ceci pour tout $\epsilon > 0$ ce qui donne le résultat.

Chapitre 3

l'intégrale de Lebesgue et applications

Exercice 1

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive et soit $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}_+$une suite de fonctions mesurables. On suppose que cette suite est croissante et que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n d\mu < +\infty$. Montrer que $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ est fini $\mu - pp$. Donner un énoncé analogue pour les séries de fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Solution :

Corrigé. Le théorème de Beppo-Levi assure que, avec $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$

$$\int_X f d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n d\mu$$

et par conséquent f est une fonction mesurable de X dans $\overline{\mathbb{R}}_+$telle que $\int_X f d\mu < +\infty$.
Par suite, si $N = \{x \in X, f(x) = +\infty\}$, on a pour tout entier naturel k

$$k\mu(N) \leq \int_N f d\mu \leq \int_X f d\mu < +\infty$$

et la suite $(k\mu(N))_{k\in\mathbb{N}}$ est majorée, ce qui implique $\mu(N) = 0$. De même, si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables de X dans $\overline{\mathbb{R}}_+$telle que

$$\sum_{k\geq 0} \int_X u_k d\mu < +\infty$$

alors la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k(x)$ converge μ-presque partout vers une limite finie. ce qui implique

$$\int_X \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k \right) d\mu = \sum_{k\geq 0} \int_X u_k d\mu <= \infty$$

et par conséquent, d'après ce qui précède, la fonction $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k(x)$ est finie presque partout, qed.

Exercice 2

Soit ($X, \mathcal{M}, \mu$) un espace mesuré où μ est une mesure positive et $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. a. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, alors

$$\lim_n n\mu(\{|f| \geq n\}) = 0.$$

La réciproque est-elle vraie ?
b. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$, alors

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \int_{|f|\leq n} |f|^2 d\mu < +\infty$$

La réciproque est-elle vraie ?

Solution :

(a) On a

$$0 \leq n\mu(\{|f| \geq n\}) = \int_X n1_{\{|f|\geq n\}} d\mu \leq \int_X |f|1_{\{|f|\geq n\}} d\mu$$

On a $0 \leq g_n = |f|1_{\{|f|\geq n\}} \leq |f| \in \mathcal{L}^1(\mu)$ et $\lim_{n\to\infty} |f(x)|1_{\{|f|\geq n\}}(x) = 0$: le théorème de convergence dominée (théorème 1.6.8) assure que $\lim_n \int_X |f|1_{\{|f|\geq n\}} d\mu = 0$ et le résultat. La réciproque est fausse. La fonction continue positive sur $[0, e^{-1}]$ donnée par $g(x) = x \ln(x^{-1})$ a pour dérivée $\ln(x^{-1}) - 1$ et est donc croissante sur $[0, e^{-1}]$ de $g(0) = 0$ à $g(e^{-1}) = e^{-1}$. On a

$$\int_0^{e^{-1}} \frac{dx}{g(x)} = \int_0^{e^{-1}} \frac{dx}{x \ln(x^{-1})} = \int_e^{+\infty} \frac{du}{u \ln(u)} = \lim_{A\to+\infty} \ln(\ln A) = +\infty$$

Néanmoins, pour $n \geq 1$,

$$\left\{x \in \left[0, e^{-1}\right], \frac{1}{g(x)} \geq n\right\} = \left\{x \in \left[0, e^{-1}\right], g(x) \leq n^{-1}\right\} = [0, x_n]$$

où $x_n \in [0, e^{-1}]$ est caractérisé par $x_n \ln(x_n^{-1}) = g(x_n) = n^{-1}$, ce qui implique

$$n\mu\left(\left\{x \in \left[0, e^{-1}\right], \frac{1}{g(x)} \geq n\right\}\right) = nx_n = \frac{1}{|\ln x_n|} \longrightarrow 0$$

car $x_n \longrightarrow 0_+$. La propriété (a) peut donc être vérifiée sans que f (ici $1/g$) soit dans $\mathcal{L}^1$. (b) Pour $f \in \mathcal{L}^1$, on a

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \int_{|f|\leq n} |f|^2 d\mu = \int \left(\sum_{n\geq 1} n^{-2}|f|^2 1_{\{|f|\leq n\}}\right) d\mu$$

Avec

$$F(x)=\sum_{n\geq 1} n^{-2}|f(x)|^2 1_{\{|f|\leq n\}}(x)=\sum_{n\geq \max(|f(x)|,1)} n^{-2}|f(x)|^2=|f(x)|^2\sum_{n\geq \max(|f(x)|,1)} n^{-2}$$

comme pour $N\geq 1$,

$$\sum_{n\geq N} n^{-2}\leq \min\left(\frac{\pi^2}{6},\frac{1}{N-1}\right)$$

on obtient

$$0\leq F(x)\leq \min\left(\frac{\pi^2}{6},\frac{1}{\max(|f(x)|,1)-1}\right)|f(x)|^2\leq \begin{cases}\frac{\pi^2}{6}|f(x)|^2 & \text{si } |f(x)|\leq 2\\ \frac{|f(x)|^2}{|f(x)|-1} & \text{si } |f(x)|>2\end{cases}$$

Comme pour $|f(x)|\leq 2$ on a $\frac{\pi^2}{6}|f(x)|^2\leq \frac{\pi^2}{6}|f(x)||f(x)|\leq |f(x)|\frac{2\pi^2}{6}\leq 4|f(x)|$ et pour $|f(x)|>2$,

$$\frac{|f(x)|^2}{|f(x)|-1}=\frac{|f(x)|}{|f(x)|-1}|f(x)|\leq 2|f(x)|$$

il vient

$$0\leq F(x)\leq 4|f(x)|$$

ce qui donne le résultat. La réciproque est fausse car avec $f(x)=\frac{1}{x}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$ (qui n'est pas dans $\mathcal{L}^1$), on a néanmoins

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\int_{|f|\leq n}|f|^2d\mu=\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}\int_{x\geq 1}\frac{1}{x^2}dx=\pi^2/6$$

Exercice 3

Déterminer la limite des suites $I_n=\int_0^1\frac{n}{1+x^2}\tanh\left(\frac{x}{n}\right)dx,\quad J_n=\int_0^1\frac{ne^{-x}}{nx+1}dx.$

solution

En posant $f_n(x)=\frac{n}{1+x^2}\tanh\left(\frac{x}{n}\right)$, on trouve

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=\frac{x}{1+x^2}\quad \text{et}\quad |f_n(x)|\leq \frac{x}{1+x^2}\sup_{\alpha>0}\left(\frac{\tanh\alpha}{\alpha}\right)$$

Le théorème de convergence dominée implique donc

$$\lim_{n\to+\infty} I_n=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\left[\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1=\frac{\ln 2}{2}$$

On a $J_n = \int_0^1 e^{-x}\left(x+\frac{1}{n}\right)^{-1} dx$ et le lemme de Fatou donne, avec $g_n(x) = e^{-x}\left(x+\frac{1}{n}\right)^{-1}$,

$$+\infty = \int_0^1 e^{-x} x^{-1} dx = \int_0^1 \left(\liminf_n g_n(x)\right) dx \leq \liminf_n \int_0^1 g_n(x) dx = \liminf_n J_n$$

Exercice 4

Soit ($X, \mathcal{M}, \mu$) un espace mesuré où μ est une mesure positive telle que $\mu(X) < +\infty$. Soit $f_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ une suite de fonctions mesurables qui converge simplement vers une fonction f.
a. On définit pour $k \geq 1, n$ entiers, l'ensemble

$$E_n^k = \cap_{p \geq n} \{x \in X, |f_p(x) - f(x)| \leq 1/k\}$$

Montrer que pour tout $k \geq 1, X = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n^k$. b. Montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une partie mesurable A_ϵ telle que $\mu(A_\epsilon) < \epsilon$ et telle que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $X \backslash A_\epsilon$.
c. Montrer que l'hypothèse $\mu(X) < +\infty$ n'est pas superflue.

solution

Corrigé. (a) Soit $x \in X$. On a $\lim_m f_m(x) = f(x)$ et par conséquent, pour tout entier $k \geq 1$, il existe un entier n tel que pour tout $p \geq n$,

$$|f_p(x) - f(x)| \leq 1/k$$

Ceci exprime exactement que $x \in E_n^k$. Remarquons également que $E_n^k \subset E_{n+1}^k$ et donc (proposition 1.4.2.b) que $\lim_n \mu\left(E_n^k\right) = \mu(X)$. Comme $\mu(X) < +\infty$, pour tout $\epsilon > 0$ et pour tout $k \geq 1$, il existe N_k tel que

$$\forall n \geq N_k, \quad \mu\left(E_n^k\right) \geq \mu(X) - \epsilon 2^{-k}$$

On peut supposer par conséquent qu'il existe une suite $(n_k)_{k \geq 1}$ strictement croissante telle que

$$\mu\left(E_{n_k}^k\right) \geq \mu(X) - \epsilon 2^{-k}$$

Il suffit en effet de définir pour cela $n_k = k - 1 + \max_{1 \leq j \leq k} N_j$. On a alors

$$N_k \leq n_k = k - 1 + \max_{1 \leq j \leq k} N_j \leq k - 1 + \max_{1 \leq j \leq k+1} N_j < k + \max_{1 \leq j \leq k+1} N_j = n_{k+1}$$

(b) Soit $\epsilon > 0$. Posons $F = \cup_{k \geq 1} F_k$ avec $F_k = \left(E_{n_k}^k\right)^c$. On a $\mu(F_k) = \mu(X) - \mu\left(E_{n_k}^k\right) \leq \epsilon 2^{-k}$ et donc $\mu(F) \leq \sum_{k \geq 1} \mu(F_k) \leq \epsilon$. Il vient avec $B = F^c$ et donc $\mu(B^c) \leq \epsilon$,

$$B = \cap_{k \geq 1} F_k^c = \cap_{k \geq 1} E_{n_k}^k$$

ce qui donne $\sup_{x\in B}|f_n(x)-f(x)| \leq \sup_{x\in E^k_{n_k}}|f_n(x)-f(x)| \leq 1/k \quad$ si $n \geq n_k$. La suite $(\sup_{x\in B}|f_n(x)-f(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers 0 .
(c) Considérons la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et la suite convergeant simplement vers 0 .
$f_n(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x-n)$. Si A est une partie mesurable de mesure de Lebesgue $\leq 1/2$ et f_n converge uniformément sur A^c, on doit avoir

$$0 = \lim_n \left(\sup_{x\in A^c} \mathbf{1}_{[0,1]}(x-n) \right)$$

ce qui implique $A^c \cap [n, n+1] = \emptyset$ pour $n \geq N$, et donc

$$A \supset [n, n+1] \Longrightarrow m(A) \geq 1, \quad \text{contredisant l'hypothèse.}$$

Exercice 5

Soit ($X, \mathcal{M}, \mu$) un espace mesuré où μ est une mesure positive, montrer que si $\lim_n f_n = f$ dans L^1 et la suite (f_n) converge presque partout vers g, alors $g = f$ presque partout.

solution

En effet, pour $\epsilon > 0, n \in \mathbb{N}$

$$\mu(\{x, |f(x)-g(x)| \geq \epsilon\}) \leq \mu\left(\{x, |f(x)-f_n(x)| \geq \epsilon/2\}\right) + \mu\left(\{x, |g(x)-f_n(x)| \geq \epsilon/2\}\right)$$

et par suite

$$\mu(\{x, |f(x)-g(x)| \geq \epsilon\}) \leq 2\epsilon^{-1}\int_X |f-f_n|\, d\mu + \mu\left(\{x, |g(x)-f_n(x)| \geq \epsilon/2\}\right)$$

ce qui donne

$$\mu(\{x, |f(x)-g(x)| \geq \epsilon\}) \leq \limsup_n \mu\left(\{x, |g(x)-f_n(x)| \geq \epsilon/2\}\right) = 0, \text{ qed.}$$

Exercice 6

Soit ($X, \mathcal{M}, \mu$) un espace mesuré où μ est une mesure positive. On dit que ($X, \mathcal{M}, \mu$) est σ-fini s'il existe une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{M}$ telle que, pour tout n, $\mu\,(X_n) < +\infty$ et $X = \cup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Montrer que ($X, \mathcal{M}, \mu$) est σ-fini si et seulement si il existe $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que pour tout $x \in X, f(x) > 0$.

solution

Supposons d'abord que $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est σ-fini. Considérons

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1_{X_n}(x)}{2^n \left(\mu\left(X_n\right) + 1\right)}$$

Pour tout $x \in X$, on a $f(x) > 0$ (car x appartient à l'un des X_n) et

$$\int_X |f| d\mu \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\mu\left(X_n\right)}{2^n \left(\mu\left(X_n\right) + 1\right)} \leq 2.$$

Réciproquement, s'il existe $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que pour tout $x \in X$, $f(x) > 0$, on pose pour $n \in \mathbb{N}$,

$$X_n = \{x \in X, f(x) > 1/(n+1)\}.$$

On a $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} X_n$ car pour $x \in X$, $f(x) > 0$ et par conséquent $f(x) > 1/(n+1)$ pour $n \geq E(1/f(x))$. Par ailleurs, comme f est positive et dans $\mathcal{L}^1(\mu)$,

$$\mu\left(X_n\right) \leq \int_X (n+1) f d\mu = (n+1) \int_X f d\mu < +\infty$$

Exercice 7

Soit ($X, \mathcal{M}, \mu$) un espace de probabilité. Soient f, g des fonctions mesurables de X à valeurs dans $]0, +\infty[$ telles que, pour tout $x \in X$, $f(x)g(x) \geq 1$. Montrer que $\int_X f d\mu \int_X g d\mu \geq 1$.

solution

Soit ($X, \mathcal{M}, \mu$) un espace de probabilité. Soient f, g des fonctions mesurables de X à valeurs dans $]0, +\infty[$ telles que, pour tout $x \in X$, $f(x)g(x) \geq 1$. Montrer que $\int_X f d\mu \int_X g d\mu \geq 1$.

Exercice 9

Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace de probabilité. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables de X à valeurs réelles. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On dit que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en mesure vers f si pour tout $\epsilon > 0$,

$$\lim_n \mu\left(\{|f_n - f| > \epsilon\}\right) = 0$$

a. Montrer que si f_n tend vers $f \mu - pp$, alors f_n tend vers f en mesure.
b. Si $p \in [1, +\infty]$ et si $f_n, f \in L^p(\mu)$ sont tels que f_n tende vers f dans $L^p(\mu)$, montrer que f_n tend vers f en mesure.

solution

Corrigé. (a) Si la suite (f_n) tend vers f presque partout, il existe $N \in \mathcal{M}$ tel que $\mu(N) = 0$ et $\forall x \in N^c, \lim_{n\to+\infty} |f_n(x) - f(x)| = 0$. Par suite, pour $\epsilon > 0$, le théorème de convergence dominée donne

$$\lim_n \mu\left(\{|f_n - f| > \epsilon\}\right) = \lim_n \int_X 1_{\{|f_n - f| > \epsilon\}} d\mu = 0$$

car $1_{\{|f_n-f|>\epsilon\}}(x) = 0$ si $|f_n(x) - f(x)| \le \epsilon$ et donc la suite $1_{\{|f_n-f|>\epsilon\}}$ converge simplement vers 0 presque partout et est majorée par 1 qui est dans L^1 car μ est une probabilité. (b) Si $p < +\infty$ et $\epsilon > 0$, on a

$$\mu\left(\{|f_n - f| > \epsilon\}\right) = \int_X 1_{\{|f_n-f|>\epsilon\}} d\mu \le \epsilon^{-p} \int_X |f_n - f|^p \, d\mu = \epsilon^{-p} \|f_n - f\|_{L^p}^p \longrightarrow 0$$

Si $p = +\infty$, on remarque que, pour $\alpha > 0$,

$$\|g\|_{L^\infty(\mu)} \le \alpha \Longrightarrow \mu(\{|g| > \alpha\}) = 0$$

Par suite, si $\lim_n \|f_n - f\|_{L^\infty(\mu)} = 0$ et $\epsilon > 0$, on a pour $n \ge N_\epsilon$, $\|f_n - f\|_{L^\infty(\mu)} \le \epsilon$ et donc

$$\mu\left(\{|f_n - f| > \epsilon\}\right) = 0$$

La suite $\left(\mu\left(\{|f_n - f| > \epsilon\}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc stationnaire égale à 0 pour $n \ge N_\epsilon$. Commentaire. Si $(X, \mathcal{M}, \mu)$ est un espace mesuré où μ est une mesure positive et si, pour $1 \le p < +\infty$, une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p(\mu)$, alors cette suite converge en mesure, comme le montrent les inégalités précédentes. Il n'est pas nécessaire de supposer pour cela que $\mu(X) < +\infty$. En revanche l'hypothèse $\mu(X) < +\infty$ est nécessaire au résultat (a), car par exemple la suite f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{x}{n}\mathbf{1}_{[0,n^2]}(x)$ tend vers 0 simplement bien que

$$\mu\left(\{|f_n(x)| > \epsilon\}\right) = \mu\left(\left\{n^2 \ge x > n\epsilon\right\}\right) = n^2 - n\epsilon \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Exercice 10

Pour quelles valeurs de $p \in [1, +\infty]$ les fonctions suivantes sont-elles dans $L^p(\mathbb{R}_+)$?
$f_1(t) = 1/(1+t)$, $f_2(t) = 1/(\sqrt{t}(1+t))$, $f_3(t) = 1/\left(\sqrt{t}(\ln t)^2 + 1\right)$, $f_4(t) = t^{-1/2}\sin(t^{-1})$.

solution

$$\begin{array}{lll}
\int_0^{+\infty} |f_1(t)|^p \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t)^p} < +\infty & & \Leftrightarrow 1 < p, \\
\int_0^{+\infty} |f_2(t)|^p \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^{p/2}(1+t)^p} < +\infty & & \Leftrightarrow \frac{2}{3} < p < 2 \\
\int_0^{+\infty} |f_3(t)|^p \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{\left(1+\sqrt{t}(\ln t)^2\right)^p} < +\infty & \Leftrightarrow & 2 \le p, \\
\int_0^{+\infty} |f_4(t)|^p \, dt = \int_0^{+\infty} \frac{\left|\sin\left(t^{-1}\right)\right|^p}{t^{p/2}} < +\infty & & \Leftrightarrow p < 2.
\end{array}$$

Exercice 11

Soit ($X, \mathcal{M}, \mu$) un espace mesuré où μ est une mesure positive. Soit $p, p' \in]1, +\infty[$ tels que $1/p + 1/p' = 1$. On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^p(\mu)$ converge faiblement vers $f \in L^p(\mu)$ si pour tout $g \in L^{p'}(\mu)$,

$$\lim_n \int_X f_n g d\mu = \int_X f g d\mu$$

Montrer que la convergence dans L^p implique la convergence faible.

solution

Soit (f_n) une suite de L^p convergeant vers f dans L^p. On a alors, pour tout $g \in L^{p'}$, en utilisant l'inégalité de Hölder,

$$\left| \int_X (f_n - f)\, g d\mu \right| \leq \|f_n - f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$