الكلية متعددة التخصصات تازة
ⵜⴰⵖⵣⵓⵏⵜ ⵜⴰⵙⵜⴻⵎⵍⵉⵜ ⵏ ⵜⴰⵣⴰ
FACULTÉ POLYDISCIPLINAIRE DE TAZA
جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES

Cours Intégration

Filière : SMA, S5

Prof. Yazough Chihab

Année universitaire : 2025/2026

Table des matières

Chapitre 1

Ensembles et théorie des cardinaux

1.1 Ensembles

1.1.1 Suites de parties d'un ensemble

Nous allons définir ici les notions de limite, limite supérieure et limite inférieure d'une suite de parties. Soit (A_n) une suite de parties de E.

Définition 1.1.1. *On rappelle que la suite (A_n) est dite croissante (resp. décroissante) lorsque pour tout entier* n, $A_n \subseteq A_{n+1}$ *(resp.* $A_{n+1} \subseteq A_n$ *). Dans ce cas, la limite de la suite (* A_n *) est définie naturellement comme la réunion (resp. l'intersection) de tous les* A_n *:*

$$\lim_{n\to\infty} A_n := \bigcup_n A_n \left(\textit{resp.} \bigcap_n A_n \right).$$

Par analogie avec le cas réel, on notera cette limite $\lim \uparrow$ (resp. $\lim \downarrow$) pour faire référence au fait que la suite (A_n) est croissante et que la limite est donc la réunion (resp. l'intersection) de tous ses éléments.

Définition 1.1.2. *On définit les deux parties de* E *suivantes :*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \left(\textit{ou } \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n \right) := \lim_{n\to\infty} \downarrow \bigcup_{k\geq n} A_k = \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} A_k,$$

où la notation $\lim \downarrow$ *fait référence au fait que la suite* $\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)_n$ *est décroissante, si bien que sa limite existe toujours (et est l'intersection de tous ses éléments, ce qu'indique la dernière égalité) ;*

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \left(\textit{ou } \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \right) := \lim_{n\to\infty} \uparrow \bigcap_{k\geq n} A_k = \bigcup_n \bigcap_{k\geq n} A_k,$$

où la notation $\lim \uparrow$ *fait référence au fait que la suite* $\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)_n$ *est croissante, si bien que sa limite existe toujours (et est la réunion de tous ses éléments, ce qu'indique la dernière égalité).*

Remarque 1.1.1. *Remarque 1.14 On peut aussi caractériser la limite supérieure et la limite inférieure par les assertions suivantes : pour tout* $x \in E$*,*

$$
\begin{aligned}
x \in \limsup_{n\to\infty} A_n &\Leftrightarrow \forall n \exists k \geq n, x \in A_k \\
&\Leftrightarrow \{n : x \in A_n\} \ \textit{est infini.} \\
x \in \liminf_{n\to\infty} A_n &\Leftrightarrow \exists n \forall k \geq n, x \in A_k \\
&\Leftrightarrow \{n : x \notin A_n\} \ \textit{est fini.}
\end{aligned}
$$

Noter que $\liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n$.
Définition 1.1.3. *On dit que la suite* (A_n) *converge si* $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$. *Lorsque c'est le cas on définit* $\lim_n A_n := \liminf_n A_n = \limsup_n A_n$.

Remarque Soit A la limite d'une suite (A_n) qui converge. Alors A est caractérisée par :

$$
\begin{cases} \forall x \in A & \exists n_0 \quad \forall n \geq n_0 \quad x \in A_n \\ \forall x \notin A & \exists n_1 \quad \forall n \geq n_1 \quad x \notin A_n. \end{cases}
$$

Exercice Montrer les deux égalités suivantes

$$
\begin{aligned}
\limsup_n {}^c A_n &= {}^c \left(\liminf_n A_n \right) \\
\liminf_n {}^c A_n &= {}^c \left(\limsup_n A_n \right).
\end{aligned}
$$

1.1.2 Fonctions et fonctions indicatrices

Définition 1.1.4. *On appelle indicatrice ou fonction indicatrice de la partie* A, *et l'on note* $\nVdash_A$, *la fonction*

$$
\begin{aligned}
\nVdash_A : E &\longrightarrow \{0,1\} \\
x &\longmapsto \begin{cases} 0 & \textit{si} \quad x \notin A \\ 1 & \textit{si} \quad x \in A \end{cases}
\end{aligned}
$$

Noter que $\nVdash_{c_A} = 1 - \nVdash_A$.
Proposition 1.1.1. *Au sens de la convergence simple,*

$$
\overline{\lim_n} \nVdash_{A_n} = \nVdash \underset{\lim_n A_n}{\overline{\lim}}
$$

et

$$
\underline{\lim}_n \nVdash_{A_n} = \nVdash_{\underline{\lim}_n A_n}
$$

Dém. Pour tout $x \in E$,

$$
\begin{aligned}
\overline{\lim_n} \nVdash_{A_n}(x) = 1 &\Leftrightarrow \forall n \exists k \geq n, \nVdash_{A_k}(x) = 1 \\
&\Leftrightarrow \forall n \exists k \geq n, x \in A_k \\
&\Leftrightarrow x \in \overline{\lim_n} A_n \\
&\Leftrightarrow \nVdash_{\lim_n A_n}(x) = 1.
\end{aligned}
$$

L'autre assertion se démontre de la même manière, ou alors en se servant de l'assertion précédente :

$$\underline{\lim}_n \mathbb{1}_{A_n} = \underline{\lim}\left(1 - \mathbb{1}_{^cA_n}\right) = 1 - \overline{\lim}_n \mathbb{1}_{^cA_n} = 1 - \mathbb{1}_{\overline{\lim}_n {^cA_n}} = 1 - \mathbb{1}_{^c(\underline{\lim}_n A_n)} = \mathbb{1}_{\underline{\lim}_n A_n},$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque Conséquence de cette proposition : la suite de parties (A_n) converge ssi la suite de fonctions ($\mathbb{1}_{A_n}$) converge simplement (et lorsque c'est le cas, la convergence a lieu vers $\mathbb{1}_{\lim_n A_n}$).

1.1.3 les formules de Hausdorff

Proposition 1.1.2. *Pour tous I et J ensembles d'indices non vides, pour toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E et pour toute famille $(B_j)_{j\in J}$ de parties de F, pour toute fonction $f : E \longrightarrow F$,*

$$f\left(\bigcup_i A_i\right) = \bigcup_i f(A_i)$$
$$f\left(\bigcap_i A_i\right) \subseteq \bigcap_i f(A_i)$$

avec égalité si f est injective ;

$$f^{-1}\left(\bigcup_j B_j\right) = \bigcup_j f^{-1}(B_j)$$
$$f^{-1}\left(\bigcap_j B_j\right) = \bigcap_j f^{-1}(B_j)$$

et pour tout $B \subseteq F$,

$$^c\left(f^{-1}(B)\right) = f^{-1}\left(^cB\right)$$

1.2 Cardinaux, équipotence, dénombrabilité

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1. *Deux ensembles E et F sont dits équipotents, ou avoir même cardinal, ou encore même puissance, s'il existe une bijection de l'un sur l'autre. On note alors* $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(F)$.

Définition 1.2.2. *On notera* $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(F)$ *s'il existe une injection de E dans F, c'est-à-dire si E a même puissance qu'une partie de F. Si de plus E et F n'ont pas même puissance, on notera* $\mathrm{Card}(E) < \mathrm{Card}(F)$.

Exemples 1.2.1. *Quelques exemples d'équipotences :*

- Les ensembles $\mathbf{P}(E)$ et $\{0,1\}^E$ (= ensemble des applications : $E \longrightarrow \{0,1\}$) sont équipotents car l'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$ est une bijection de l'un sur l'autre ;

- les ensembles $\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}$ (entiers pairs) sont équipotents car l'application $n \mapsto 2n$ est une bijection de l'un sur l'autre ;

- les ensembles $\mathbb{N}$ *et* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *sont équipotents car on peut bien énumérer de manière injective les couples d'entiers (par exemple en suivant les points des droites d'équation* $y = -x + c$*, lorsque* c *croît dans* $\mathbb{N}$ *) ;*
- par récurrence, $\mathbb{N}$ *est équipotent avec tous les produits cartésiens du type* $\mathbb{N}^p (p \in \mathbb{N}^\star$ *).*
Théorème 1.2.1. *(théorème de Cantor-Bernstein, admis) Si* $\mathrm{Card}\,(E_1) \leq \mathrm{Card}\,(E_2)$ *et* $\mathrm{Card}\,(E_2) \leq \mathrm{Card}\,(E_1)$*, alors* $\mathrm{Card}\,(E_1) = \mathrm{Card}\,(E_2)$.

Remarque La relation $\leq$ est une relation d'ordre. En effet elle est
1. réflexive : il existe une injection de E dans E (l'injection canonique, c'est-à-dire ici l'identité), donc $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(E)$;
2. antisymétrique, grâce au théorème de Cantor-Bernstein ;
3. transitive : si $\mathrm{Card}\,(E_1) \leq \mathrm{Card}\,(E_2)$ et $\mathrm{Card}\,(E_2) \leq \mathrm{Card}\,(E_3)$, alors il existe une injection $f_1 : E_1 \longrightarrow E_2$ et une injection $f_2 : E_2 \longrightarrow E_3$, donc il existe une injection $f_3 : E_1 \longrightarrow E_3$ qui n'est autre que... $f_2 \circ f_1$, par conséquent $\mathrm{Card}\,(E_1) \leq \mathrm{Card}\,(E_3)$.
Proposition 1.2.1. $\mathrm{Card}(E) < \mathrm{Card}(\mathbf{P}(E))$.

Dém. Soit $f : E \to \mathbf{P}(E)$. Montrons que f ne peut être surjective (et donc ne peut être bijective). Soit

$$\Omega := \{x \in E : x \notin f(x)\}.$$

Montrons que par l'absurde que Ω ne peut avoir d'antécédent par f. Si $\exists z \in E$ tel que $f(z) = \Omega$ alors - soit $z \in \Omega$ alors $z \notin f(z)$, c'est-à-dire $z \notin \Omega$; - soit $z \notin \Omega$ alors $z \in f(z)$, c'est-à-dire $z \in \Omega$, ce qui constitue une contradiction. D'autre part il existe clairement une injection de E dans $\mathbf{P}(E)$, par exemple celle qui à x associe $\{x\}$.
Définition 1.2.3. *On définit les notions d'infini et de dénombrable comme suit :*
- E *est dit infini* s *'il existe* $x_0 \in E$ *et une injection de* E *dans* $E \setminus \{x_0\}$*, et est dit fini sinon ;*
- E *est dit dénombrable si* $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N})$ *;*
- E *est dit infini dénombrable si* $\mathrm{Card}(E) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$ *;*
- E *est dit (infini) non dénombrable si* $\mathrm{Card}(E) > \mathrm{Card}(\mathbb{N})$ *;*
- une partie A *de* E *est dite cofinie si* ${}^cA$ *est fini.*

Remarque L'ensemble $\mathbb{N}$ est (bien !) infini car par exemple l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{N}^\star \\ n &\longmapsto n+1 \end{aligned}$$

est bien une injection.
Définition 1.2.4. $\mathrm{Card}(\mathbb{N})$ *est souvent noté* $\aleph_0$*(´ aleph zéro »).*
Proposition 1.2.2. *E est infini ssi* $\mathrm{Card}(E) \geq \mathrm{Card}(\mathbb{N})$

1.2.2 Cardinaux classiques et propriétés

Proposition 1.2.3. *Les ensembles* $\mathbb{Z}, \mathbb{N}^p$ $(p \in \mathbb{N}^\star)$ *et* $\mathbb{Q}$ *sont dénombrables.*

Dém. On a déjà vu que $\mathbb{N}^p$ était équipotent à $\mathbb{N}$. Pour ce qui est de $\mathbb{Z}$, la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{N} \\ n &\longmapsto \begin{cases} -2n & \text{si} \quad n \leq 0 \\ 2n-1 & \text{si} \quad n > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

est une bijection. Enfin, rappelons que pour tout $x \in \mathbb{Q}^\star, \exists!(p,q) \in \mathbb{Z}^\star \times \mathbb{N}^\star$ tel que $x = p/q$ et $p \wedge q = 1$. Ainsi la fonction qui à 0 associe $(0,1)$ et qui est définie sur $\mathbb{Q}^\star$ par

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Q}^\star &\longrightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star \\ p/q &\longmapsto (p,q) \end{aligned}$$

est une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$, donc $\mathrm{Card}(\mathbb{Q}) \leq \mathrm{Card}\,(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star)$. Or il existe une injection $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, donc l'application qui à (x, y) associe ($g(x), y$) est une injection de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{N}^2$, ce qui montre que $\mathrm{Card}\,(\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star) \leq \mathrm{Card}\,(\mathbb{N}^2) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$, donc $\mathrm{Card}(\mathbb{Q}) \leq \mathrm{Card}(\mathbb{N})$.

Proposition 1.2.4. *Toute réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Dém. Soit $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$, où pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est dénombrable. Alors par définition, pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe une injection $\varphi_n : E_n \to \mathbb{N}$. Pour tout $x \in E$ on définit alors

$$N(x) := \min\{n \geq 0 : x \in E_n\} < \infty.$$

Alors la fonction

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow \mathbb{N}^2 \\ x &\longmapsto \big(N(x), \varphi_{N(x)}(x)\big) \end{aligned}$$

est une injection car pour tous $x, y \in E$ tels que $\phi(x) = \phi(y)$, on a $N(x) = N(y) =: n$ puis $\varphi_{N(x)}(x) = \varphi_{N(y)}(y)$, c'est-à-dire $\varphi_n(x) = \varphi_n(y)$, donc $x = y$, puisque φ_n est injective. Par conséquent, $\mathrm{Card}(E) \leq \mathrm{Card}\,(\mathbb{N}^2) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$.

Proposition 1.2.5. *Tout produit cartésien fini d'ensembles dénombrables est dénombrable.*

Dém. Pour $i = 1, \ldots, n$, soit E_i dénombrable et une injection $\varphi_i : E_i \to \mathbb{N}$. Alors la fonction

$$\begin{aligned} \phi : \quad \Pi_{i=1}^n E_i &\longrightarrow \mathbb{N}^n \\ (x_1, \ldots, x_n) &\longmapsto (\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)) \end{aligned}$$

est clairement injective donc $\mathrm{Card}\,(\Pi_i E_i) \leq \mathrm{Card}\,(\mathbb{N}^n) = \mathrm{Card}(\mathbb{N})$.

Proposition 1.2.6. *Tout produit cartésien infini dénombrable d'ensembles non vides (même finis) est non-dénombrable pourvu qu'une infinité d'entre eux ne soient pas réduits à un singleton.*

Dém. Admettons pour simplifier que pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Card}\,(E_i) \geq 2$. Alors pour tout i, il existe une injection $\varphi_i : \{0,1\} \to E_i$. Donc l'application

$$\begin{aligned} \phi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow E_0 \times E_1 \times \cdots \\ (x_0, x_1, \ldots) &\longmapsto (\varphi_0(x_0), \varphi_1(x_1), \ldots) \end{aligned}$$

est injective, donc $\mathrm{Card}\,(\Pi_i E_i) \geq \mathrm{Card}\,\big(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\big) = \mathrm{Card}\,\mathbf{P}(\mathbb{N}) > \mathrm{Card}(\mathbb{N})$.

Théorème 1.2.2. *Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbf{P}(\mathbb{N})$ sont équipotents.*

Chapitre 2

Tribus

2.1 Définitions

Soit E un ensemble. On appelle classe de parties de E un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}(E)$.
Définition 2.1.1. *Définition 1.1.1. Une tribu $\mathcal{A}$ sur E est un sous-ensemble non vide de $\mathcal{P}(E)$ tel que :*
(i) la partie vide appartient à $\mathcal{A}$,
(ii) le complémentaire d'un élément de $\mathcal{A}$ est dans $\mathcal{A}$,
(iii) $\mathcal{A}$ est stable par réunion dénombrable.

Notons immédiatement quelques propriétés satisfaites par les tribus. Si $\mathcal{A}$ est une tribu alors - $E \in \mathcal{A}$,

– $\mathcal{A}$ est stable par intersection dénombrable,
– $\mathcal{A}$ est stable par différence : $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{A}$,
– $\mathcal{A}$ est stable par différence symétrique : $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \Delta B \in \mathcal{A}$.
Exemple 2.1.1. *La plus petite tribu de E est $\mathcal{A} = \{\emptyset, E\}$, tandis que la plus grande est $\mathcal{P}(\mathcal{E})$.*
Définition 2.1.2. *On appelle espace mesurable tout couple ($E, \mathcal{A}$) formé par un ensemble E et une tribu $\mathcal{A}$ sur E.*
Proposition 2.1.1. *L'intersection de tribus sur E est encore une tribu.*

Démonstration. Soit $(\mathcal{A}_i)_{i\in I}$ une famille de tribus sur E. Notons $\mathcal{A} = \cap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ l'intersection de ces tribus. Alors, l'ensemble vide appartient à chaque tribu $\mathcal{A}_i$ et donc à $\mathcal{A}$. Soit $A \in \mathcal{A}$. Pour tout $i \in I, A \in \mathcal{A}_i$ donc $A^c \in A_i$: $A^c \in \mathcal{A}$. La réunion dénombrable s'établit de même.
Proposition 2.1.2. *(tribu engendrée). Soit $\mathcal{E}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$. Il existe une plus petite tribu (au sens de l'inclusion) contenant tous les éléments de $\mathcal{E}$. Elle est appelée tribu engendrée par $\mathcal{E}$, et est notée $\sigma(\mathcal{E})$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble de toutes les tribus $\mathcal{M}$ sur E contenant $\mathcal{E}$. L'ensemble $\mathcal{X}$ n'est pas vide puisqu'il contient la tribu $\mathcal{P}(E)$. Posons

$$\mathcal{A} = \bigcap_{\mathcal{M}\in\mathcal{X}} \mathcal{M} = \{A \subset E, \forall \mathcal{M} \in \mathcal{X}, A \in \mathcal{M}\}$$

Il est clair que $\mathcal{E} \subset \mathcal{A}$. De plus, $\mathcal{A}$ est une tribu comme intersection (quelconque) de tribus et, par définition, elle est contenue dans toute tribu contenant $\mathcal{E}$.

Remarque. Si A est un sous-ensemble de E, alors

$$\sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, E\}$$

Remarque Si $\mathcal{A}$ est une tribu sur E, alors $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.
Proposition 2.1.3. *(image réciproque d'une tribu). Soit E et F deux ensembles, f une application de E dans F et $\mathcal{A}$ une tribu sur F. Alors*

$$f^{-1}(\mathcal{A}) = \left\{f^{-1}(A), \quad A \in \mathcal{A}\right\}$$

est une tribu sur E, appelée tribu image réciproque de $\mathcal{A}$ par f.

Démonstration. La classe $f^{-1}(\mathcal{A})$ contient l'ensemble vide puisque $\emptyset = f^{-1}(\emptyset)$. Soit $B \in f^{-1}(\mathcal{A})$. Alors il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $B = f^{-1}(A)$. Puisque $\mathcal{A}$ est une tribu, $A^c \in \mathcal{A}$. Enfin, remarquons que $f^{-1}(A)^c = f^{-1}(A^c)$. La stabilité par réunion dénombrable s'établit de même.
Proposition 2.1.4. *Soit f une application de E dans $F, \mathcal{E}$ un sous-ensemble de $\mathcal{P}(F)$. Alors*

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right)$$

En d'autres termes, l'image réciproque de la tribu engendrée par $\mathcal{E}$ est la tribu engendrée par l'image réciproque de $\mathcal{E}$.

Démonstration. Comme $\mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E})$, on a $f^{-1}(\mathcal{E}) \subset f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$ qui est une tribu et ainsi $\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right)$ est inclus dans $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$.

Montrons l'inclusion inverse. Notons $\mathcal{B}$ l'ensemble des parties $B \subset F$ telles que $f^{-1}(B)$ appartienne à $\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right)$. Alors $\mathcal{B}$ est une tribu. De plus, $\mathcal{B}$ contient $\mathcal{E}$ donc contient $\sigma(\mathcal{E})$. Il en résulte que $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subset f^{-1}(\mathcal{B})$. Comme, par définition, $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right)$, on obtient l'inclusion souhaitée : $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subset \sigma\left(f^{-1}(\mathcal{E})\right)$.
Définition 2.1.3. *(tribu induite). Soit B un sous-ensemble de E et $\mathcal{A}$ une tribu sur E. On appelle tribu trace, ou tribu induite, par $\mathcal{A}$ sur B la tribu*

$$\mathcal{A}_B = \{A \cap B, A \in \mathcal{A}\}$$

Définition 2.1.4. *(tribu produit). Soit $\mathcal{A}$ une tribu sur E et $\mathcal{B}$ une tribu sur F. On appelle tribu produit, et l'on note $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$, la tribu sur $E \times F$ engendrée par l'ensemble des parties de $E \times F$ qui s'écrivent sous la forme $A \times B$ avec $A \in \mathcal{A}$ et $B \in \mathcal{B}$.*

2.2 Tribu borélienne

Rappelons que pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}$, un ensemble O de $\mathbb{R}$ est ouvert si

$$\forall x \in O, \exists a, b \in O, x \in]a, b[\subset O.$$

On note $\mathcal{O}$ l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$.
Soit O un ouvert de $\mathbb{R}$. Notons

$$I = \left\{(\rho, r) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}_+^*,]\, \rho - r, rho + r[\subset O\right\}$$

Alors I est dénombrable et

$$O = \bigcup_{(\rho,r)\in I}]\rho - r, \rho + r[$$

On voit ainsi que tout ouvert de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts (on peut même se limiter à des intervalles à extrémités rationnelles).

Définition 2.2.1. *La tribu $\sigma(\mathcal{O})$ engendrée par $\mathcal{O}$ est appelée la tribu borélienne de $\mathbb{R}$. On la note $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Ses éléments sont appelés les boréliens.*

Remarque Même si cela n'est pas évident, on peut montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est strictement inclus dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$: il existe des parties de $\mathbb{R}$ qui ne sont pas boréliennes.

Proposition 2.2.1. *Sur $\mathbb{R}$, muni de sa topologie usuelle, la tribu borélienne est engendrée par*

1. *la classe des intervalles ouverts bornés,*
2. *la classe des intervalles de la forme $]-\infty, a[$ avec $a \in \mathbb{R}$,*
3. *la classe des intervalles de la forme $]-\infty, a]$ avec $a \in \mathbb{R}$,*

Démonstration. Prouvons le point 1 . Notons $\mathcal{E}$ la classe des intervalles ouverts bornés. On a $\mathcal{E} \subset \mathcal{O}$, donc $\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{O})$. D'autre part, tout ouvert de $\mathcal{O}$ est réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts bornés, d'où $\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{E})$ et par suite $\sigma(\mathcal{O}) \subset \sigma(\mathcal{E})$.

Prouvons le point 2. Soit $\mathcal{E}'$ la classe des intervalles de la forme $]-\infty, a\,[$. On a $\sigma\,(\mathcal{E}') \subset \sigma(\mathcal{O})$. Pour établir l'inclusion inverse, il suffit de montrer que $\mathcal{E} \subset \sigma\,(\mathcal{E}')$ (puisque la tribu engendrée par $\mathcal{E}$ est la tribu borélienne). Soit $]a, b[\in \mathcal{E}$. On a

$$\begin{aligned}]a, b[&=]-\infty, b[\cap]a, +\infty[=]-\infty, b[\cap]-\infty, a]^c \\ &=]-\infty, b\,[\cap\,(\cap_{n\in\mathbb{N}^*}]-\infty, a + 1/n[)^c \in \sigma\,(\mathcal{E}') \end{aligned}$$

Tout intervalle $]a, b\,[$ appartient donc à la tribu engendrée par $\mathcal{E}'$ et donc $\sigma(\mathcal{E}) \subset \sigma\,(\mathcal{E}')$.

Le point 3 s'établit de manière analogue.

Remarque Nous aurons aussi à considérer la droite achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Rappelons que sa topologie est définie par la base d'ouverts formés des intervalles ouverts de la forme $]a, b[]a, , +\infty]$ et $[-\infty, b[$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. On démontre de façon analogue que la tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ est engendrée par les classes $\{[-\infty, a[, a \in \overline{\mathbb{R}}\}$ ou $\{[-\infty, a], a \in \overline{\mathbb{R}}\}$ par exemple.

Proposition 2.2.2. *La tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ est égale à la tribu engendrée par la classe des ouverts de la forme*

$$\prod_{i=1}^{d}]a_i, b_i[\quad \textit{avec } \infty < a_i < b_i < +\infty$$

Il existe une notion d'espace topologique abstrait. Rappelons que $\mathcal{O} \subset \mathcal{P}(E)$ est une topologie (l'ensemble des ouverts) sur E si

(i) $\emptyset$ et E appartiennent à $\mathcal{O}$,

(ii) $\mathcal{O}$ est stable par intersection finie,

(iii) $\mathcal{O}$ est stable par réunion quelconque.

Il est naturel de munir un espace topologique ($E, \mathcal{O}$) (où $\mathcal{O}$ désigne l'ensemble des ouverts de E) d'une tribu compatible en un certain sens avec la structure topologique préexistante.

Proposition 2.2.3. *Soit ($E, \mathcal{O}$) un espace topologique. La tribu $\sigma(\mathcal{O})$ engendrée par $\mathcal{O}$ est appelée la tribu borélienne de E. On la note $\mathcal{B}(E)$. Ses éléments sont appelés les boréliens.*

Chapitre 3

Applications mesurables

3.1 Définitions et critères de mesurabilité

Définition 3.1.1. *Soit ($E, \mathcal{A}$) et ($F, \mathcal{B}$) deux espaces mesurables et f une application de E dans F. On dit que f est mesurable de ($E, \mathcal{A}$) dans ($F, \mathcal{B}$) si l'image réciproque par f de tout élément de $\mathcal{B}$ est un élément de $\mathcal{A}$. On dira plus simplement que f est mesurable s'il n'y a pas d'ambiguïté sur les tribus considérées.*

Autrement dit, f est mesurable si $f^{-1}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{A}$. Lorsque E et F sont des espaces topologiques et $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ désignent leurs tribus boréliennes respectives, une application mesurable est encore appelée borélienne.

Exemple 3.1.1. *Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Pour toute partie A de E on note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de l'ensemble A (valant 1 sur A et 0 sur son complémentaire). La fonction $\mathbf{1}_A$ est mesurable de ($E, \mathcal{A}$) dans $\mathbb{R}$ (muni de sa tribu borélienne) si et seulement si $A \in \mathcal{A}$.*

Proposition 3.1.1. *Soit $(E, \mathcal{A})$ et $(F, \mathcal{B})$ deux espaces mesurables, f une application de E dans F et $\mathcal{E}$ une classe sur F telle que $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{B}$. Alors f est mesurable si et seulement si l'image réciproque de tout élément de $\mathcal{E}$ appartient à $\mathcal{A}$.*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Réciproquement, si $\mathcal{A}$ contient l'image réciproque de $\mathcal{E}$, elle contient également la tribu engendrée par l'image réciproque de $\mathcal{E}$ qui est encore l'image réciproque de la tribu engendrée par $\mathcal{E}$, c'est-à-dire l'image réciproque de $\mathcal{B}$ par hypothèse.

Corollaire 3.1.1. *Soit E et F deux espaces topologiques munis de leurs tribus boréliennes respectives. Toute fonction continue f de E dans F est mesurable.*

Démonstration. Soit $\mathcal{O}_E$ (resp. $\mathcal{O}_F$) la classe des ouverts de E (resp. de F). Par définition de la continuité de f, on a $f^{-1}(\mathcal{O}_F) \subset \mathcal{O}_E \subset \mathcal{B}(E)$. La tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$ de E contient donc $\sigma\left(f^{-1}(\mathcal{O}_F)\right) = f^{-1}\left(\sigma\left(\mathcal{O}_F\right)\right) = f^{-1}(\mathcal{B}(F))$ et f est mesurable.

Corollaire 3.1.2. *Soit f une application mesurable de ($E, \mathcal{A}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne. Alors f est mesurable si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*
(i) $\forall a \in \mathbb{R}, \{x \in E, f(x) < a\} \in \mathcal{A}$,
(ii) $\forall a \in \mathbb{R}, \{x \in E, f(x) \leq a\} \in \mathcal{A}$,
(iii) $\forall a \in \mathbb{R}, \{x \in E, f(x) > a\} \in \mathcal{A}$,
(iv) $\forall a \in \mathbb{R}, \{x \in E, f(x) \geq a\} \in \mathcal{A}$.

Démonstration. En effet, l'une quelconque des classes suivantes de parties de $\mathbb{R}$

$$]-\infty, a[; a \in \mathbb{R}\}; \quad \{]-\infty, a]; a \in \mathbb{R}\}; \quad \{]a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\}; \quad \{[a, +\infty[; a \in \mathbb{R}\}$$

engendre la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

3.2 Propriétés de stabilité

La mesurabilité est stable par composition.
Proposition 3.2.1. *Soit $(E,\mathcal{A}),(F,\mathcal{B}),(G,\mathcal{C})$ trois espaces mesurables, f une application mesurable de $(E,\mathcal{A})$ dans $(F,\mathcal{B})$ et g une application mesurable de $(F,\mathcal{B})$ dans $(G,\mathcal{C})$. Alors l'application $f\circ g$ est mesurable de ($E,\mathcal{A}$) dans ($G,\mathcal{C}$).*
Proposition 3.2.2. *Soit $(F_1,\mathcal{B}_1)$ et $(F_2,\mathcal{B}_2)$ deux espaces mesurables et p_1 et p_2 les projections de $F_1\times F_2$ sur F_1 et F_2 respectivement. On munit $F_1\times F_2$ de la tribu produit $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$.*
(i) les projections p_1 et p_2 sont mesurables ;
(ii) soit ($E,\mathcal{A}$) un espace mesurable et f une application de E dans $F_1\times F_2$. Alors f est mesurable si et seulement si les composées $p_1\circ f : E\to F_1$ et $p_2\circ f : E\to F_2$ sont mesurables.

Démonstration. Prouvons le point (i). Pour tout $B_1\in\mathcal{B}_1$, on a $p_1^{-1}(B_1)=B_1\times F_2\in\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$. Donc p_1 est mesurable. On procède de même pour p_2.
Prouvons le point (ii). Si f est mesurable, il est clair que $p_1\circ f$ et $p_2\circ f$ le sont. Réciproquement, supposons que $p_1\circ f$ et $p_2\circ f$ soient mesurables. Alors, pour tout $B_1\in\mathcal{B}_1$, l'ensemble $f^{-1}(B_1\times F_2)$ n'est autre que $(p_1\circ f)^{-1}(B_1)$ qui appartient à $\mathcal{A}$. De même, pour tout $B_2\in\mathcal{B}_2$, on a $f^{-1}(F_1\times B_2)$ appartient à $\mathcal{A}$. Il en résulte que

$$f^{-1}(B_1\times B_2)=f^{-1}((B_1\times F_2)\cap(F_1\times B_2))=f^{-1}(B_1\times F_2)\cap f^{-1}(F_1\times B_2)\in\mathcal{A}$$

Comme $\mathcal{B}_1\otimes\mathcal{B}_2$ est la tribu engendrée par les parties de la forme $B_1\times B_2$, avec $B_1\in\mathcal{B}_1$ et $B_2\in\mathcal{B}_2$, la proposition 2.1.3 permet de conclure que f est mesurable.
Corollaire 3.2.1. *Pour qu'une fonction à valeurs complexes soit mesurable, il faut et il suffit que ses parties réelle et imaginaire soient mesurables. Si f et g sont des fonctions mesurables de ($E,\mathcal{A}$) dans $\mathbb{C}$, alors $f+g$, $fg,|f|,\dots$ sont mesurables.*

Avant d'étudier la stabilité de la notion de mesurabilité par passage à la limite, rappelons quelques définitions concernant les suites à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$.
Définition 3.2.1. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. La plus grande (resp. petite) valeur d'adhérence de la suite $(u_n)_n$ est notée* $\limsup u_n$ (*resp* $\liminf u_n$). *Leurs définitions sont données par*

$$\limsup u_n=\inf_{n\geq 0}\sup_{k\geq n}u_k \quad \textit{et} \quad \liminf u_n=\sup_{n\geq 0}\inf_{k\geq n}u_k.$$

Remarque Les limites supérieure et inférieure sont a priori des éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.
Remarque On a toujours $\liminf u_n\leq\limsup_n u_n$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si $\liminf u_n=\limsup_n u_n$.
Remarque Si $(f_n)_n$ est une suite d'applications de E dans $\overline{\mathbb{R}}$, on note $\limsup f_n$ la fonction qui à $x\in E$ associe $\limsup f_n(x)\in\overline{\mathbb{R}}$.
Proposition 3.2.3. *La mesurabilité est stable par passage à la limite.*
(i) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur $(E,\mathcal{A})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Les fonctions $\sup f_n,\inf f_n,\limsup f_n$ *et* $\liminf f_n$ *sont mesurables.*
(ii) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur $(E,\mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout $x\in E$, la limite $\lim_n f_n(x)=f(x)$ *existe. Alors f est mesurable.*

Démonstration. Établissons tout d'abord le point (i). Par hypothèse, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{f_n \leq a\}$ appartient à $\mathcal{A}$. Or,

$$\{\sup f_n \leq a\} = \bigcap_n \{f_n \leq a\}$$

D'après le corollaire , sup f_n est mesurable. Comme $\inf f_n = -\sup(-f_n)$, $\inf f_n$ est mesurable. Enfin, $\limsup f_n = \inf_n \left(\sup_{k \geq n} f_k\right)$ et $\liminf f_n = \sup_n \left(\inf_{k \geq n} f_k\right)$ sont mesurables d'après ce qui précède.

Pour prouver le point (ii), quitte à considérer les parties réelle et imaginaire des fonctions f_n, on peut supposer que f_n est réelle. Mais alors $f = \liminf f_n = \limsup f_n$ est mesurable d'après (i).
Proposition 3.2.4. *Soit f et g deux applications mesurables de ($E, \mathcal{A}$) dans $\overline{\mathbb{R}}_+$(muni de sa tribu borélienne). Alors $\{f < g\}$ et $\{f \leq g\}$ sont des éléments de $\mathcal{A}$.*

Démonstration. En décomposant ces ensembles de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\{f < g\} &= \cup_{q \in \mathbb{Q}} \{f < q < g\} = \cup_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < q\} \cap \{q < g\}) \\
\{f \leq g\} &= \cap_{n \geq 1} \{f < g + 1/n\}
\end{aligned}$$

on obtient leur appartenance à la tribu $\mathcal{A}$.

3.3 Approximation des fonctions mesurables

L'objet de ce paragraphe est d'établir un résultat d'approximation relativement élémentaire mais fondamental pour la construction de l'intégrale de Lebesgue : toute fonction mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$est limite croissante de fonctions élémentaires, appelées fonctions étagées.
Définition 3.3.1. *On notera $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}_+$) l'ensemble des fonctions mesurables (resp. mesurables positives) sur ($E, \mathcal{A}$) à valeurs dans $\mathbb{R}$ (resp $\overline{\mathbb{R}}_+$).*
Définition 3.3.2. *Une fonction mesurable sur $(E, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est dite étagée si elle prend seulement un nombre fini de valeurs distinctes. On notera $\mathcal{E}_+$(resp. $\mathcal{E}$) l'ensemble des fonctions étagées sur $(E, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$(resp. $\mathbb{C}$).*

Une fonction étagée ne peut prendre que des valeurs finies (dans $\mathbb{C}$) contrairement aux fonctions mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Soit f une fonction étagée et n le nombre de valeurs distinctes prises par f. Notons $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ces valeurs et posons, pour $i = 1 \ldots, n, A_i = \{f = \alpha_i\}$. Alors les parties $(A_i)_{i=1,\ldots,n}$ sont mesurables et f peut encore s'écrire

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$$

Réciproquement, toute combinaison linéaire à coefficients réels ou complexes de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables est une fonction étagée. Remarquons de plus que les fonctions étagées $\mathrm{sur}(E, \mathcal{A})$ forment un espace vectoriel.
Théorème 3.3.1. *Soit f une fonction mesurable sur ($E, \mathcal{A}$) à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Il existe une suite croissante $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions étagées positives qui converge simplement vers f. De plus, la convergence est uniforme sur tout ensemble $B \in \mathcal{A}$ sur lequel f est bornée.*

Démonstration. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k = 0, 2, \dots n2^n - 1$, posons

$$A_n = \{f \geq n\} \quad \text{et} \quad A_{n,k} = \left\{ \frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n} \right\}$$

On définit alors la fonction f_n par :

$$f_n = \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbf{1}_{A_{n,k}} + n\mathbf{1}_{A_n}$$

Par définition, f_n est une fonction étagée positive telle que $f_n \leq f$. D'autre part, on vérifie que si $x \in A_{n,k}$,

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} f_n(x) & \text{si } \frac{2k}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2k+1}{2^{n+1}} \\ f_n(x) + \frac{1}{2^{n+1}} & \text{si } \frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f(x) < \frac{2(k+1)}{2^{n+1}} \end{cases}$$

De même, si $x \in A_n$,

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} n+1 & \text{si } f(x) \geq n+1 \\ n + \frac{l}{2^{n+1}} & \text{si } n + \frac{l}{2^{n+1}} \leq f(x) < n + \frac{l+1}{2^{n+1}}, 0 \leq l \leq 2^{n+1} - 1 \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in E$, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$: la suite (f_n) est croissante.
De plus, $(A_n)_n$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ donc si $x \in A_{n_0}^c$, alors pour tout $n \geq n_0, x \in A_n^c$ ou encore

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$$

Ceci implique que $(f_n(x))_n$ converge vers $f(x)$. Ainsi, la suite (f_n) converge sur l'ensemble $\cup_n A_n^c$ qui n'est autre que $\{f < +\infty\}$.

D'autre part, si $x \in \{f = +\infty\}$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = n$ qui tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

Soit à présent $B \in \mathcal{A}$ tel que f soit bornée sur B. Il existe n_1 tel que, pour tout $x \in B$, $f(x) < n_1$. Alors $B \cap A_{n_1} = \emptyset$ et ainsi,

$$\forall n \geq n_1, \forall x \in B, \quad 0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$$

La convergence est donc bien uniforme sur B.
Corollaire 3.3.1. *Toute fonction f mesurable sur $(E, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) est limite simple d'une suite (f_n) de fonctions étagées à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).*

Démonstration. Si f est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, on peut l'écrire $f = f^+ - f^-$avec $f^+ = \sup(f, 0)$ et $f^- = -\inf(0, f)$. Comme f^+et f^-sont mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, il existe des suites (g_n) et (h_n) de fonctions étagées positives tendant simplement vers f^+et f^-respectivement. La suite (f_n), où $f_n = g_n - h_n$, est formée de fonctions étagées et converge simplement vers f. Si f est à valeurs complexes, on l'écrira comme combinaison de ses parties réelle et imaginaire.

Chapitre 4

Mesures positives

4.1 Définitions et propriétés élémentaires

Définition 4.1.1. *Soit ($E, \mathcal{A}$) un espace mesurable. On appelle mesure positive sur ($E, \mathcal{A}$) une application μ de $\mathcal{A}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$telle que*
(i) $\mu(\emptyset) = 0$,
(ii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments deux à deux disjoints d'éléments de $\mathcal{A}$, alors

$$\mu\left(\cup_n A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu\left(A_n\right)$$

On peut parfois préciser le terme de mesure positive

- *Si $\mu(E) < +\infty$, on dit que la mesure μ est finie (ou bornée).*
- *Si $\mu(E) = 1$, la mesure μ est appelée mesure de probabilité.*
- *S'il existe une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\cup_n A_n = E$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu\left(A_n\right)$ est fini, on dit que μ est une mesure σ-finie.*

Définition 4.1.2. *On appelle espace mesuré tout triplet ($E, \mathcal{A}, \mu$) où ($E, \mathcal{A}$) est un espace mesurable et μ est une mesure positive sur ($E, \mathcal{A}$).*

Analysons à présent les propriétés satisfaites par une mesure en commençant par les propriétés faisant intervenir un nombre fini d'ensembles.
Proposition 4.1.1. *Soit ($E, \mathcal{A}, \mu$) un espace mesuré.*
(i) Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints alors

$$\mu\left(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\right) = \mu\left(A_1\right) + \cdots + \mu\left(A_n\right).$$

(ii) Si A et B sont deux éléments de $\mathcal{A}$ tels que $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$. De plus, si $\mu(A) < +\infty$, alors $\mu(B\backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.
(iii) Soient A et B deux éléments de $\mathcal{A}$, $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

Démonstration. Le point (i) s'établit à partir du point (ii) de la définition d'une mesure en choisissant $A_k = \emptyset$ pour $k \neq 1, \ldots, n$.
Pour (ii), si $A \subset B$, on écrit $B = A \cup (B\backslash A)$. Comme A et ($B\backslash A$) sont disjoints, $\mu(B)$ est égal à $\mu(A) + \mu(B\backslash A) \geq \mu(A)$.

Pour établir le point (iii), distinguons deux cas. Si $\mu(A \cap B) = +\infty$ alors $\mu(A)$ ou $\mu(B)$ vaut aussi $+\infty$. Sinon, il faut remarquer que $A \cup B$ s'écrit comme la réunion disjointe de $(A \backslash (A \cap B))$, $A \cap B$ et $B \backslash (A \cap B)$. En utilisant le point (i), il vient :

$$\mu(A \cup B) = \mu(A \backslash (A \cap B)) + \mu(A \cap B) + \mu(B \backslash (A \cap B)).$$

Puisque $A \cap B$ est bien entendu inclus dans A et dans B le point (ii) fournit le dernier argument :

$$\begin{aligned} \mu(A \cup B) &= \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B) + \mu(B) - \mu(A \cap B) \\ &= \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B), \end{aligned}$$

ce qui est le résultat attendu.
Donnons une définition équivalente de la notion de mesure (positive).
Proposition 4.1.2. *Une application μ de $\mathcal{A}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$est une mesure si et seulement si*
(i) $\mu(\emptyset) = 0$;
(ii) si A et B sont deux éléments disjoints de $\mathcal{A}$, $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$,
(iii) pour toute suite croissante $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, $\mu(\cup_n B_n) = \lim_n \mu(B_n)$.

Démonstration. Supposons que les points (i), (ii) et (iii) de la proposition soient vrais. Par récurrence sur le point (ii), on obtient que, si $A_1, \ldots, A_n$ sont des éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints alors

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n)$$

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $B_k = \cup_{n \leq k} A_n$. On a $\mu(B_k) = \sum_{n=0}^{k} \mu(A_n)$. De plus, $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante et $\cup_{k=0}^{\infty} B_k$ coïncide avec $\cup_{n=0}^{\infty} A_n$. Par hypothèse, on obtient

$$\mu(\cup_{n=0}^{\infty} A_n) = \mu(\cup_{k=0}^{\infty} B_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(B_k) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k)$$

Réciproquement, supposons que μ soit une mesure. Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$. Posons $A_0 = B_0$ et, pour tout $n \geq 1$, $A_n = B_n \backslash B_{n-1} \in \mathcal{A}$. Alors $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints et, pour tout $n \geq 0$, $B_n = \cup_{k=0}^{n} A_k$. Il en résulte que

$$\mu(\cup_{n=0}^{\infty} B_n) = \mu(\cup_{k=0}^{\infty} A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \lim_{n \to \infty} \mu(B_n),$$

et la proposition est démontrée.
Proposition 4.1.3. *Soit ($E, \mathcal{A}, \mu$) un espace mesuré.*
(i) Si $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\mu(\cup_{n=0}^{\infty} B_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n)$.
(ii) Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathcal{A}$ telle qu'il existe n_0 avec $\mu(A_{n_0})$ fini, alors la suite $(\mu(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge en décroissant vers $\mu(\cap_n A_n)$.

Démonstration. Démontrons (i). Posons $A_0 = B_0$ et, pour tout $n \geq 1$, $A_n = B_n \backslash (\cup_{k<n} B_k)$. Les ensembles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont deux à deux disjoints et $B_n = \cup_{k \leq n} A_k$. Il en résulte que

$$\mu(\cup_{n=0}^{\infty} B_n) = \mu(\cup_{k=0}^{\infty} A_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(A_k) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(B_n),$$

puisque $A_n \subset B_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Démontrons (ii). Pour $i \geq n_0$, posons $B_k = A_{n_0} \backslash A_k$. La suite $(B_k)_{k \geq n_0}$ est croissante et on a $\cup_{k \geq n_0} B_k = A_{n_0} \backslash (\cap_{k \geq n_0} A_k)$. Puisque $\cap_{k \geq n_0} A_k \subset A_{n_0}$ et $A_k \subset A_{n_0}$, on a

$$\mu(A_{n_0} \backslash (\cap_{k \geq n_0} A_k)) = \mu(A_{n_0}) - \mu(\cap_{k \geq n_0} A_k) \quad \text{et} \quad \mu(B_k) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A_k),$$

d'où

$$\begin{aligned} \mu(A_{n_0}) - \mu(\cap_{k \geq n_0} A_k) &= \mu(\cup_{k \geq n_0} B_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(B_k) \\ &= \lim_{k \to \infty} (\mu(A_{n_0}) - \mu(A_k)) = \mu(A_{n_0}) - \lim_{k \to \infty} \mu(A_k) \end{aligned}$$

et donc $\mu(\cap_{k \geq 1} A_k) = \lim_{k \to \infty} \mu(A_k)$.

Remarque Dans l'énoncé (ii), l'hypothèse de l'existence d'un entier n_0 tel que $\mu(A_{n_0})$ est fini ne peut être supprimée. En effet, si μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ et $A_n = \{n, n+1, \ldots\}$ alors $\mu(A_n) = +\infty$ et $\cap_n A_n = \emptyset$.

4.2 Mesures discrètes

Les premiers exemples de mesures que l'on va considérer sont à la fois élémentaires et fondamentaux. Ils correspondent à l'idée intuitive de masses ponctuelles : il va s'agir d'affecter des poids à des points de l'espace.

L'exemple le plus naïf consiste à affecter un poids à un seul point.
Définition 4.2.1. *(Mesure de Dirac). Soit ($E, \mathcal{A}$) un espace mesuré et $a \in E$. Posons, pour tout $A \in \mathcal{A}$:*

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \textit{si } a \in A, \\ 0 & \textit{si } a \notin A. \end{cases}$$

L'application δ_a est une mesure de probabilité, appelée mesure (ou masse) de Dirac au point a.

Remarque Si $A \in \mathcal{A}, \delta_a(A) = \mathbf{1}_A(a)$.
Pour montrer que δ_a est une mesure, utilisons par exemple la définition alternative d'une mesure fournie par la proposition 3.1.4. Il est clair que $\delta_a(\emptyset)$ est nul. Soit A et B deux ensembles disjoints appartenant à $\mathcal{A}$. Alors

$$\delta_a(A \cup B) = \mathbf{1}_{A \cup B}(a) = \mathbf{1}_A(a) + \mathbf{1}_B(a) = \delta_a(A) + \delta_a(B).$$

Soit à présent une suite croissante $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$. Alors

$$a \in \cup_n B_n \Longleftrightarrow \exists n_0 \geq 0, a \in B_{n_0} \Longleftrightarrow \exists n_0 \geq 0, \forall n \geq n_0, a \in B_n$$

Donc, si $a \in \cup_n B_n$ alors $\delta_a(\cup_n B_n) = 1$ et la suite $(\delta_a(B_n))_{n \in \mathbb{N}}$ (à valeurs dans $\{0, 1\}$) vaut 1 à partir d'un certain rang. De même, si $a \notin \cup_n B_n$ alors $\delta_a(\cup_n B_n) = 0$ et la suite $(\delta_a(B_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite nulle.
Définition 4.2.2. *(Mesure de Bernoulli). Soit $p \in]0, 1[$. La mesure de Bernoulli de paramètre p est définie par $\mu = (1-p)\delta_0 + p\delta_1$. C'est une mesure de probabilité.*

Définition 4.2.3. *(Mesures discrètes). Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E et $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Posons pour tout $A \in \mathcal{A}$,*

$$\mu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \delta_{a_n}(A)$$

L'application $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}_+$est une mesure positive. Tout point a_n tel que $\alpha_n > 0$ est appelé atome de μ.

Remarque Si $(a_{k,n})_{k,n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres positifs, alors

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n}$$

l'égalité ayant lieu dans $\overline{\mathbb{R}}^+$.

Montrons que l'application $\mu = \sum_n \alpha_n \delta_{a_n}$ définie sur $\mathcal{A}$ est une mesure. Clairement, $\mu(\emptyset) = 0$. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments disjoints de $\mathcal{A}$. Alors

$$\begin{aligned}
\mu\left(\cup_k A_k\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \delta_{a_n}\left(\cup_k A_k\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathbf{1}_{\cup_k A_k}\left(a_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{A_k}\left(a_n\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \mathbf{1}_{A_k}\left(a_n\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \delta_{a_n}\left(A_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu\left(A_k\right)
\end{aligned}$$

Exemple 4.2.1. *La mesure de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est un exemple très classique de mesure discrète. Elle est définie par*

$$\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}\delta_k$$

Remarquons de plus que c'est une mesure de probabilité.

4.3 Mesure de Lebesgue

Théorème 4.3.1. *Il existe une unique mesure λ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que*
(i) $\lambda([0, 1]) = 1$,
(ii) Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda(a + B) = \lambda(B)$.

Elle est appelée mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Remarque La mesure de Lebesgue est la seule mesure invariante par translation qui affecte la mesure 1 à l'ensemble $[0, 1]$.
Cette mesure coïncide avec la notion intuitive de longueur comme le montre le résultat suivant.
Proposition 4.3.1. *Pour tous $a < b$ réels,*

$$\lambda([a, b]) = \lambda(]a, b]) = \lambda([a, b[) = \lambda(]a, b[) = b - a.$$

Si I est un intervalle non borné alors $\lambda(I) = +\infty$.

Démonstration. Soit $\alpha = \lambda(\{0\})$. Alors, d'après l'invariance par translation de λ, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda(\{x\}) = \lambda(x + \{0\}) = \lambda(\{0\}) = \alpha$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$,

$$n\alpha = \lambda(\{1/k, k = 1, \ldots, n\}) \leq \lambda([0, 1]) = 1$$

Ceci assure donc que $\alpha = 0$. On dit que λ ne charge aucun singleton. La mesure des intervalles ne dépend pas du fait qu'ils contiennent ou non leurs extrémités (on utilisera cette remarque dans la suite sans le rappeler systématiquement).

Soit $n \geq 1$. Découpons $]0, 1]$ en n intervalles disjoints égaux.

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda([0, 1]) = \lambda(]0, 1]) = \lambda\left(\cup_{k=1}^{n}]\, (k-1)/n, k/n]\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \lambda((k-1)/n +]0, 1/n\Big]\Big) = n\lambda([0, 1/n]) \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1, \lambda(]0, 1/n] = 1/n$.
Soit à présent $n \geq 1$ et $k_1 \leq k_2 \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\lambda(]k_1/n, k_2/n]) = \lambda\left(\cup_{l=1}^{k_2-k_1} \left] (k_1 + l - 1)/n, (k_1 + l)/n\right]\right) = \frac{k_2}{n} - \frac{k_1}{n}..$$

Ainsi, pour tous rationnels $r \leq r', \lambda(]r, r'[) = r' - r$.
Soit $a < b \in \mathbb{R}$. il existe deux suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ de rationnels strictement décroissante pour la première et strictement croissante pour la seconde telles que $u_n \leq v_n$ pour tout n et qui convergent respectivement vers a et b. On obtient alors

$$\lambda(]a, b[) = \lambda\left(\cup_n]\, u_n, v_n[\right) = \lim_n \lambda(]u_n, v_n[) = \lim_n (v_n - u_n) = b - a.$$

Soit enfin I un intervalle non borné. Supposons-le de la forme $[a, +\infty[$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}, I$ contient $[a, a + n]$ et ainsi, $\lambda(I) \geq n$. Ceci assure que $\lambda(I) = +\infty$.

Chapitre 5

Construction de l'intégrale de Lebesgue

Dans ce chapitre, on se donne un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$. L'idée est de construire l'intégrale pour des fonctions de plus en plus générales grâce à des passages à la limite.

5.1 Intégration des fonctions étagées positives

Définition 5.1.1. *Soit f une fonction étagée positive, prenant les valeurs distinctes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. On pose $A_i = f^{-1}(\{\alpha_i\})$ pour $1 \leq i \leq n$. On appelle intégrale de f par rapport à μ, et on note $\int f d\mu$, le nombre fini ou infini (élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$) défini par*

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

avec la convention usuelle en théorie de la mesure : $0 \times \infty = 0$.

Proposition 5.1.1. *L'intégrale de fonctions étagées positives vérifie les propriétés suivantes.*
(i) Si f et g sont deux fonctions étagées positives et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$\int (\lambda f + g) d\mu = \lambda \int f d\mu + \int g d\mu$$

(ii) Si f et g sont deux fonctions étagées positives telles que $f \leq g$, alors

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu$$

Démonstration. Montrons la propriété (i) dans le cas où $\lambda = 1$. Le cas général s'en déduit immédiatement. Posons

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{1}_{A_i} \quad \text{et} \quad g = \sum_{i=1}^{m} \beta_j \mathbf{1}_{B_j}$$

où les $(\alpha_i)_i$ (resp. les $(\beta_j)_j$) sont distincts. Notons $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ les valeurs (distinctes) prises par $f + g$ et

$$C_k = (f+g)^{-1}(\gamma_k) = \bigcup_{(i,j) \in I_k} (A_i \cap B_j),$$

où $I_k = \{(i,j), \alpha_i + \beta_j = \gamma_k\}$. Puisque les ensembles $(A_i \cap B_j)_{i,j}$ sont deux à deux disjoints,

$$\mu(C_k) = \sum_{(i,j)\in I_k} \mu(A_i \cap B_j).$$

On a donc par définition de l'intégrale de $f+g$

$$\begin{aligned}
\int (f+g)d\mu = \sum_{k=1}^{l} \gamma_k \mu(C_k) &= \sum_{k=1}^{l} \sum_{(i,j)\in I_k} (\alpha_i + \beta_j)\mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \beta_j \mu(A_i \cap B_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j) \\
&= \int f d\mu + \int g d\mu
\end{aligned}$$

Pour établir (ii), il suffit d'appliquer (i), en remarquant que $g-f$ est une fonction étagée positive, pour obtenir

$$\int f d\mu \leq \int f d\mu + \int (g-f)d\mu = \int (f + (g-f))d\mu = \int g d\mu$$

Ceci achève la preuve.
Remarque Soit la fonction $f = \sum_i \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ où les (α_i) ne sont pas nécessairement distincts et les (A_i) nécessairement disjoints. On a encore $\int f d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(A_i)$.

5.2 Intégration des fonctions mesurables positives

Définition 5.2.1. *Soit f une fonction mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On appelle intégrale de f par rapport à μ, et on note $\int f d\mu$ l'élément de $\overline{\mathbb{R}}_+$défini par*

$$\int f d\mu = \sup\left\{ \int u d\mu, u \in \mathcal{E}_+ \textit{telle que } u \leq f \right\}$$

Remarque Si f est une fonction étagée positive alors les deux définitions de son intégrale coïncident car le supremum est atteint pour $u = f$.
Proposition 5.2.1. *(Croissance de l'intégrale). Pour toutes fonctions f et g mesurables positives telles que $f \leq g$,*

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu$$

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de l'inclusion

$$\{u \in \mathcal{E}_+, u \leq f\} \subset \{u \in \mathcal{E}_+, u \leq g\}$$

et de la définition de l'intégrale.
Voici le premier des grands théorèmes d'intervertion limite-intégrale qui font toute la puissance de la théorie de la mesure.
Théorème 5.2.1. *(de convergence monotone ou de Beppo Levi). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de $\mathcal{M}_+$. Alors $f = \lim_n f_n\,(= \sup_n f_n)$ est aussi dans $\mathcal{M}_+$et*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu$$

Démonstration. On sait déjà que le supremum d'éléments de $\mathcal{M}_+$est encore dans $\mathcal{M}_+$d'après la proposition 2.2.8. Comme $f_n \leq f$, on a $\int f_n d\mu \leq \int f d\mu$. La croissance de l'intégrale assure que la suite $\left(\int f_n d\mu\right)_n$ est elle aussi croissante et donc convergente dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. On obtient donc

$$\lim_n \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$$

Démontrons l'inégalité opposée. Soit u une fonction positive étagée inférieure à f et $\lambda \in]0,1[$. Posons

$$E_n = \{x \in E, f_n(x) \geq \lambda u(x)\}$$

La suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante (au sens de l'inclusion). Soit $x \in E$. Si $u(x) = 0$ alors $x \in E_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $u(x) > 0$ alors

$$\lim_n f_n(x) = f(x) \geq u(x) > \lambda u(x)$$

et ainsi $x \in E_n$ pour n assez grand et donc $\cup_n E_n = E$. D'autre part, par définition de E_n, $f_n \geq \lambda u \mathbf{1}_{E_n}$ et donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par croissance de l'intégrale,

$$\int f_n d\mu \geq \int \lambda u \mathbf{1}_{E_n} d\mu$$

La fonction $\lambda u \mathbf{1}_{E_n}$ est étagée positive. On sait donc calculer son intégrale. Si $u = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ alors

$$\int u d\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i) \quad \text{et} \quad \int u \mathbf{1}_{E_n} d\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i \cap E_n)$$

Or, pour tout $i = 1, \ldots, k$, $\mu(A_i \cap E_n)$ converge en croissant vers $\mu(A_i)$, donc, $\int u \mathbf{1}_{E_n} d\mu$ converge vers $\int u d\mu$. On a donc établi que, pour tout $u \in \mathcal{E}_+$tel que $u \leq f$ et tout $\lambda \in]\,0,1[$,

$$\lim_n \int f_n d\mu \geq \lim_n \lambda \int u \mathbf{1}_{E_n} d\mu = \lambda \int u d\mu$$

On obtient donc, en faisant tendre λ vers 1 , que, l'intégrale de toute fonction étagée positive u majorée par f est inférieure à la limite des intégrales des fonctions f_n. Il en est donc de même pour l'intégrale de f :

$$\int f d\mu = \sup\left\{\int u d\mu, u \in \mathcal{E}_+, \text{telle que } u \leq f\right\} \leq \lim_n \int f_n d\mu$$

et l'égalité est donc établie.
Corollaire 5.2.1. *Si f et g sont deux fonctions mesurables positives, alors*

$$\int (f+g)d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$$

Démonstration. D'après le théorème 2.3.3, il existe des suites $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissantes de fonctions étagées positives qui convergent simplement vers f et g respectivement. Alors la suite $(f_n+g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions étagées positives qui converge simplement vers $f+g$. La linéarité de l'intégrale de fonctions étagées assure alors, pour tout n,

$$\int (f_n+g_n)\, d\mu = \int f_n d\mu + \int g_n d\mu$$

Le théorème de Beppo Levi permet de conclure en passant à la limite.
Corollaire 5.2.2. *(Intervertion du signe somme et du signe intégrale). Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables positives, on a*

$$\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int f_n d\mu$$

l'égalité ayant lieu dans $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Démonstration. Posons $g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$. La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables donc on peut

$$\begin{aligned}\int \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n\right) d\mu &= \int \left(\lim_{n\to\infty} g_n\right) d\mu = \lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\int f_k d\mu\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int f_k d\mu\right)\end{aligned}$$

grâce au théorème de convergence monotone.

5.3 Intégration de fonctions mesurables

Définition 5.3.1. *Une fonction f définie sur E à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est dite intégrable (par rapport à μ) si elle est mesurable et si $\int |f| d\mu < +\infty$.*

Nous noterons $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ (resp $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$) l'ensemble des fonctions intégrables à valeurs réelles (resp. complexes). Pour être plus précis, nous utiliserons (en cas d'éventuelles confusions) les notations $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(E,\mathcal{A},\mu)$ et $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(E,\mathcal{A},\mu)$.
Proposition 5.3.1. *Soit f une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$. Alors f est intégrable si et seulement si f^+et f^-le sont.*

Démonstration. Rappelons que $f^+ = \sup(f,0)$ et $f^- = -\inf(f,0) = \sup(-f,0)$. On a alors

$$|f| = f^+ + f^-, \quad f^- \le |f|, \quad f^+ \le |f|$$

La proposition découle de ces relations.

Définition 5.3.2. *Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. On appelle intégrale de f, et on note $\int f d\mu$, le nombre réel*

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

Remarque On pourra noter encore

$$\int f d\mu = \int f(x)\mu(dx)$$

Certains mathématiciens adoptent quant à eux la notation $\int f(x)d\mu(x)$ que nous éviterons d'employer. Ceci dit, il ne s'agit que d'une notation, ni plus ni moins arbitraire qu'une autre.

Proposition 5.3.2. *L'ensemble $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'application qui à f associe $\int f d\mu$ est une forme linéaire sur cet espace. De plus, on a*
(i) l'intégrale conserve la positivité (si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et $f \geq 0$, alors $\int f d\mu \geq 0$),
(ii) l'intégrale conserve les inégalités (si $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et $f \leq g$, alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$),
(iii) si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu), \left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$.

Démonstration. On sait déjà que l'ensemble des fonctions réelles mesurables est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. De plus, si $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $|\lambda f + g| \leq |\lambda||f| + |g|$. On en déduit que

$$\int |\lambda f + g| d\mu \leq |\lambda| \int |f| d\mu + \int |g| d\mu < +\infty$$

L'ensemble $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ est donc un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Soient $f, g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$. On a

$$\begin{cases} f + g = (f+g)^+ - (f+g)^- \\ f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \end{cases}$$

d'où $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$. On intègre cette égalité par rapport à μ en remarquant que tous les termes sont des fonctions mesurables positives. Il vient donc

$$\int (f+g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu = \int (f+g)^- d\mu + \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu$$

Toutes ces quantités sont finies donc on obtient

$$\int (f+g)^+ d\mu - \int (f+g)^- d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu + \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu$$

ce qui établit la linéarité de l'intégrale. On montre de même que

$$\int (\lambda f) d\mu = \lambda \int f d\mu$$

Pour prouver (i), on remarque que, si $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ est positive, alors son intégrale est celle qui a été définie dans la définition 4.2.1. Elle appartient à $\mathbb{R}_+$. Le point (ii) se déduit du point (i) en considérant la fonction positive et intégrable $g - f$. Pour montrer (iii) on écrit tout simplement,

$$\left|\int f d\mu\right| = \left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right| \leq \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu$$

ce qui assure la commutation annoncée de la valeur absolue et de l'intégrale.
Proposition 5.3.3. *Soit f une fonction mesurable à valeurs dans $\mathbb{C}$. Alors f est intégrable si et seulement si Re f et $\operatorname{Im} f$ le sont.*
Définition 5.3.3. *Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$. On appelle intégrale de f, et on note $\int f d\mu$, le nombre complexe*

$$\int f d\mu = \int \operatorname{Re} f d\mu + i \int \operatorname{Im} f d\mu$$

Proposition 5.3.4. *L'ensemble $\mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ et l'application qui à f associe $\int f d\mu$ est une forme linéaire sur cet espace. De plus,*

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu$$

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\left|\int f d\mu\right| = \alpha \int f d\mu$. On peut toujours choisir α de module 1 et

$$\begin{aligned}\left|\int f d\mu\right| &= \int \alpha f d\mu = \int \operatorname{Re}(\alpha f) d\mu + i \int \operatorname{Im}(\alpha f) d\mu \\ &\leq \int |\operatorname{Re}(\alpha f)| d\mu + \int |\operatorname{Im}(\alpha f)| d\mu \leq \int |\alpha f| d\mu = \int |f| d\mu\end{aligned}$$

5.4 Mesures discrètes

Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesurable, $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de points de E telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\{\alpha_k\} \in \mathcal{A}$ et $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs. On définit une mesure $\mu \, \mathrm{sur} (E, \mathcal{A})$

$$\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \delta_{a_k}$$

On souhaite étudier l'ensemble $\mathcal{L}^1(\mu)$ et comprendre l'objet $\int f d\mu$ pour $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.
Proposition 5.4.1. *Avec les notations du début du paragraphe.*
(i) Soit f mesurable de $(E, \mathcal{A})$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Alors, dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, $\int f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(a_k)$.
(ii) Une fonction f mesurable de $(E, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{C}$ est μ-intégrable ssi $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k |f(a_k)| < +\infty$. Dans ce cas, $\int f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(a_k)$.

Démonstration. Démontrons le point (i). On procède en trois étapes. Supposons que $f = \mathbf{1}_A$ avec $A \in \mathcal{A}$. Alors

$$\int f d\mu = \mu(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbf{1}_A(a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(a_k)$$

Supposons à présent f étagée positive, alors $f = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{1}_{A_i}$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mathbf{1}_{A_i}(a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{1}_{A_i}(a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(a_k)$$

Enfin, si f est mesurable positive, il existe une suite croissante de fonctions étagées positives $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers f. Par le théorème de convergence monotone,

$$\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_n(a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \lim_n f_n(a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(a_k)$$

ce qui achève la preuve du point (i).
Démontrons à présent le point (ii). Soit f mesurable à valeurs dans $\mathbb{C}$. Appliquons le point (i) à $|f|$: f est μ-intégrable ssi $\int |f| d\mu$ est fini c'est-à-dire ssi $\sum_k \alpha_k |f(a_k)|$ est fini. Si tel est le cas, on écrit

$$f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + i(\operatorname{Im} f)^+ - i(\operatorname{Im} f)^-$$

Les quatre fonctions mesurables positives $(\operatorname{Re} f)^+, \ldots, (\operatorname{Im} f)^-$sont intégrables par rapport à μ (puisqu'elles sont toutes majorées par $|f|$). D'après (i) et la linéarité de l'intégrale, on obtient la relation souhaitée.
Exemples 5.4.1. *Soit μ la mesure Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$: $\mu = p\delta_1 + (1-p)\delta_0$. Alors,*

$$\int x\mu(dx) = (1-p) \times 0 + p \times 1 \quad \textit{et} \quad \int \cos(\pi x/4)\mu(dx) = 1 - p + p\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Soit $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}\delta_k$. Alors $f \in \mathcal{L}^1$ si et seulement si

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}|f(k)| < +\infty$$

et dans ce cas,

$$\int f d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} f(k)$$

5.5 Mesures à densité

Étant donné un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$, on peut construire de nombreuses mesures à partir de μ comme le montre la proposition suivante.
Proposition 5.5.1. *Soit ($E, \mathcal{A}, \mu$) un espace mesuré et g une fonction mesurable positive sur ($E, \mathcal{A}$). Soit ν l'application de $\mathcal{A}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$définie par*

$$\nu(A) = \int \mathbf{1}_A g d\mu = \int_A g d\mu$$

Alors ν est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$.

Démonstration. On a évidemment $\nu(\emptyset) = 0$. Soit (A_n) une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints. Posons $A = \cup_n A_n$. On a

$$\nu(A) = \int \mathbf{1}_A g d\mu = \int \sum_n \mathbf{1}_{A_n} g d\mu = \sum_n \int \mathbf{1}_{A_n} g d\mu = \sum_n \nu(A_n)$$

grâce au théorème de convergence monotone.
Définition 5.5.1. *La mesure ν est appelée mesure de densité g par rapport à μ. On la note souvent $g.\mu$. La fonction g est appelée la densité de ν par rapport à μ.*
Proposition 5.5.2. *(Intégration par rapport à une mesure à densité). Avec les notations de la proposition 4.5.1.*
(i) Soit f une fonction mesurable positive sur $(E, \mathcal{A})$. Alors, dans $\overline{\mathbb{R}}_+$,

$$\int f d\nu = \int (fg) d\mu \tag{4.1}$$

(ii) Soit f une fonction mesurable à valeurs complexes sur $(E, \mathcal{A})$. Alors f est intégrable pour ν si et seulement si fg est intégrable pour μ et on a alors

$$\int f d\nu = \int (fg) d\mu$$

Démonstration. Pour démontrer le point (i), on procède en trois étapes. Si $f = \mathbf{1}_A$ avec $A \in \mathcal{A}$, la relation (4.1) découle de la définition de ν. Si f est étagée et positive, l'égalité se déduit de la linéarité de l'intégrale. Supposons enfin que f soit simplement mesurable et positive. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions étagées et positives qui converge simplement vers f. Par le théorème de convergence monotone,

$$\int f d\nu = \lim_n \int f_n d\nu = \lim_n \int (f_n g)\, d\mu = \int (fg) d\mu$$

Démontrons à présent le point (ii). Soit f mesurable à valeurs dans $\mathbb{C}$. Appliquons le point (i) à $|f|$: f est ν-intégrable ssi $\int |f| g d\nu$ est fini c'est-à-dire ssi fg est μ-intégrable. Si tel est le cas, on écrit

$$f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + i(\operatorname{Im} f)^+ - i(\operatorname{Im} f)^-$$

Les quatre fonctions mesurables positives $(\operatorname{Re} f)^+, \ldots, (\operatorname{Im} f)^-$sont intégrables par rapport à ν (puisqu'elles sont toutes majorées par $|f|$). D'après (i) et la linéarité de l'intégrale, on obtient la relation souhaitée.

5.6 Intégration par rapport à une mesure image

Proposition 5.6.1. *(Définition d'une mesure image). Soit ($E, \mathcal{A}$) et ($F, \mathcal{B}$) deux espaces mesurables et φ une application mesurable de E dans F. Soit μ une mesure sur $(E, \mathcal{A})$. L'application ν qui à $B \in \mathcal{B}$ associe*

$$\nu(B) = \mu\left(\varphi^{-1}(B)\right)$$

définit une mesure sur $(F, \mathcal{B})$ appelée mesure image de μ par φ. On la notera μ_φ.

Démonstration. Comme $\varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, on a $\mu\left(\varphi^{-1}(\emptyset)\right) = 0$.
Soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints. La suite ($\varphi^{-1}(B_n)$) est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints et $\varphi^{-1}(UB_n) = \cup\varphi^{-1}(B_n)$ donc

$$\nu\left(\cup_n B_n\right) = \mu\left(\varphi^{-1}\left(\cup_n B_n\right)\right) = \mu\left(\cup_n \varphi^{-1}\left(B_n\right)\right) = \sum_n \mu\left(\varphi^{-1}\left(B_n\right)\right) = \sum_n \nu\left(B_n\right),$$

ce qui achève la preuve.
Proposition 5.6.2. *Avec les notations de la proposition 4.6.1.*
(i) Soit f une fonction mesurable positive définie sur ($F, \mathcal{B}$). Alors (l'égalité a lieu dans $\overline{\mathbb{R}}_+$)

$$\int_F f d\mu_\varphi = \int_E f\circ\varphi d\mu \tag{4.2}$$

(ii) Soit f une fonction mesurable à valeurs complexes définie sur $(F, \mathcal{B})$. Alors f est intégrable par rapport à μ_φ si et seulement si $f\circ\varphi$ est intégrable par rapport à μ. Dans ce cas,

$$\int_F f d\mu_\varphi = \int_E f\circ\varphi d\mu$$

Démonstration. Démontrons le point (i) en trois étapes. Si f est la fonction indicatrice de $B \in \mathcal{B}$, l'égalité $\mu_\varphi(B) = \mu\left(\varphi^{-1}(B)\right)$ qui définit la mesure image s'écrit encore

$$\int_Y \mathbf{1}_B d\mu_\varphi = \int_X \mathbf{1}_{\varphi^{-1}(B)} d\mu = \int_X \mathbf{1}_B\circ\varphi d\mu$$

Si f est étagée positive, la relation (4.2) se déduit du cas précédent par linéarité. Enfin, si f est mesurable positive, d'après le théorème d'approximation 2.3.3, il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante de fonctions étagées positives qui converge simplement vers f. Alors $(f_n\circ\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions étagées positives qui converge simplement vers $f\circ\varphi$. D'après ce qui précède, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_Y f_n d\mu_\varphi = \int_X f_n\circ\varphi d\mu$$

et l'égalité souhaitée est conséquence du théorème de convergence monotone.
Démontrons à présent le point (ii). Soit f mesurable à valeurs dans $\mathbb{C}$. Le point (i) appliqué à $|f|$ montre que f est intégrable par rapport à μ_φ si et seulement si $f\circ\varphi$ l'est par rapport à μ. Supposons donc f intégrable et écrivons alors

$$f = (\operatorname{Re} f)^+ - (\operatorname{Re} f)^- + i(\operatorname{Im} f)^+ - i(\operatorname{Im} f)^-$$

Les quatre fonctions mesurables positives $(\operatorname{Re} f)^+, \ldots, (\operatorname{Im} f)^-$sont intégrables par rapport à μ_φ (puisqu'elles sont toutes majorées par $|f|$). D'après (i) et la linéarité de l'intégrale, on obtient la relation souhaitée.

5.7 Intégrale de Lebesgue et intégrale de Riemann

Rappelons brièvement les principes fondamentaux de l'intégrale de Riemann.

5.7.1 Intégrale sur un intervalle compact

Soit f une fonction réelle bornée sur $[a,b]$. Soit $\sigma : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n+1} = b$ une subdivision de $[a,b]$. On appelle pas de la subdivision le nombre $\delta(\sigma) = \max_{1\leq k\leq n+1}(x_k - x_{k-1})$. Posons

$$m_k = \inf\{f(t), t \in [x_k, x_{k+1}]\} \quad \text{et} \quad M_k = \sup\{f(t), t \in [x_k, x_{k+1}]\}$$

Les sommes de Darboux associées à la subdivision σ sont

$$s(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_{k+1} - x_k) \quad \text{et} \quad S(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_{k+1} - x_k)$$

Définition 5.7.1. *On dit que f est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$ s'il existe un nombre réel I tel que les sommes $s(\sigma)$ et $S(\sigma)$ tendent vers I quand $\delta(\sigma)$ tend vers 0 :*

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0, \quad \forall\sigma \text{ t.q. } \delta(\sigma) \leq \eta, \quad |S(\sigma) - I| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |s(\sigma) - I| \leq \varepsilon.$$

Le nombre I est alors appelé l'intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$ et on le note $\int_a^b f(t)dt$.
Considérons à nouveau la subdivision σ et, pour tout k, choisissons $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. La somme de Riemann définie par σ et $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ est par définition

$$S(\sigma, \xi) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

Si f est intégrable au sens de Riemann, les sommes de Riemann convergent vers $\int_a^b f(t)dt$ lorsque $\delta(\sigma)$ tend vers 0 , uniformément par rapport au choix de ξ. Plus précisément,

$$\forall\varepsilon > 0, \quad \exists\eta > 0, \quad \forall\sigma \text{ t.q. } \delta(\sigma) \leq \eta, \quad \forall\xi \text{ associé à } \sigma, \quad |S(\sigma, \xi) - I| \leq \varepsilon.$$

Théorème 5.7.1. *Toute fonction f continue par morceaux sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann. De plus, si f est continue, la fonction $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est dérivable sur $[a,b]$ de dérivée $F' = f$.*

5.7.2 Intégrale généralisée

Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$, où b peut être égal à $+\infty$, localement intégrable au sens de Riemann ; c'est-à-dire intégrable au sens de Riemann sur tout intervalle compact $[a,c] \subset [a,b[$.

On dit que f admet une intégrale généralisée sur $[a,b[$ si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ admet une limite lorsque x tend vers b (avec $x < b$). On pose alors

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b_-} \int_a^x f(t)dt$$

Dans ce cas, on dit encore que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est convergente.
On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b |f(t)|dt$ est convergente.
Remarque La convergence absolue entraîne la convergence, mais la réciproque est fausse comme le montre l'exemple classique

$$\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

5.7.3 Comparaison des intégrales de Riemann et Lebesgue pour une fonction bornée sur un intervalle compact

Proposition 5.7.1. *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors si λ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, $f\mathbf{1}_{[a,b]} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ et*

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(t)dt$$

Démonstration. Il est clair que $f\mathbf{1}_{[a,b]}$ est borélienne. Soit $M = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$. La fonction f étant continue sur le compact $[a,b]$, M est un réel positif et

$$\left|f\mathbf{1}_{[a,b]}\right| \leq M\mathbf{1}_{[a,b]} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$$

ce qui assure que $f\mathbf{1}_{[a,b]}$ est Lebesgue-intégrable. De même, pour tout $x \in [a,b]$, $f\mathbf{1}_{[a,x]}$ est Lebesgue-intégrable. Posons $F(x) = \int f\mathbf{1}_{[a,x]} d\lambda$ et montrons que F est dérivable en tout point x_0 de $[a,b]$ de dérivée $f(x_0)$. Soit $h > 0$. Comme

$$\mathbf{1}_{[a,x_0+h]} f = \mathbf{1}_{[a,x_0]} f + \mathbf{1}_{]x_0,x_0+h]} f$$

on a

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int \mathbf{1}_{x_0,x_0+h]} f d\lambda$$

d'où

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h} \int \mathbf{1}_{x_0,x_0+h]} (f - f(x_0)) d\lambda$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est continue en x_0, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout x tel que $|x - x_0| \leq \eta$, on ait $|f(x_0) - f(x)| \leq \varepsilon$. Si $0 < h < \eta$ alors

$$\left|\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| \leq \frac{1}{h} \int \varepsilon \mathbf{1}_{]_{x_0,x_0+h]}} d\lambda = \varepsilon$$

Le cas $h < 0$ se traite de même. Ainsi, F est dérivable sur $[a,b]$ de dérivée f. Comme $F(a) = 0$ (car $\lambda(\{a\}) = 0$), on a $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ pour tout $x \in [a,b]$ (et notamment pour $x = b$).

Remarque La proposition précédente s'étend facilement au cas d'une fonction f continue par morceaux. Elle conduit à noter $\int_{[a,b]} f dx$ l'intégrale de Lebesgue $\int f \mathbf{1}_{[a,b]} d\lambda$ (et même $\int_a^b f(x)dx$. Cette notation est souvent adoptée pour une fonction f intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,b]$ sans hypothèse de continuité.
Lorsque l'on sort du cadre des fonctions continues par morceaux, les liens entre intégrales de Riemann et de Lebesgue sont assez subtils. Voici quelques résultats éclairants.
Il existe des fonctions intégrables au sens de Lebesgue qui ne sont pas intégrables au sens de Riemann. Par exemple la fonction $f = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est intégrable au sens de Lebesgue et son intégrale est nulle. En revanche, pour toute subdivision σ de $[0,1]$, on a $S(\sigma) = 1$ et $s(\sigma) = 0$.
Les fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$ sont connues.
Théorème 5.7.2. *(Lebesgue). Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée est intégrable au sens de Riemann ssi il existe $N \subset [a,b]$ de mesure de Lebesgue nulle tel que f est continue en tout $x \in [a,b]\backslash N$.*

5.7.4 Intégrale de Riemann généralisée et intégrale de Lebesgue

Proposition 5.7.2. *Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f\mathbf{1}_{[a,b[} \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$ si et seulement si $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente et, dans ce cas, on a*

$$\int f\mathbf{1}_{[a,b[}d\lambda = \int_a^b f(t)dt$$

Démonstration. Supposons d'abord f positive. Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de points de $[a,b[$ qui converge vers b. Pour tout n,

$$\int f\mathbf{1}_{[a,b_n[}d\lambda = \int_a^{b_n} f(t)dt$$

En utilisant le théorème de convergence monotone (pour l'intégrale de Lebesgue), on a

$$\int f\mathbf{1}_{[a,b[}d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int f\mathbf{1}_{[a,b_n]}d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_a^{b_n} f(t)dt \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

Or, par définition, f est intégrable au sens de Lebesgue si et seulement si cette limite est finie, donc si et seulement si f est intégrable au sens de Riemann. De plus les intégrales sont les mêmes.

Dans le cas général, on sait que f est intégrable au sens de Lebesgue si et seulement si $|f|$ l'est, donc si et seulement si $\int_a^b f(t)dt$ est absolument convergente. Si c'est le cas, écrivons $f = f^+ - f^-$. On a $f^+ \leq |f|$ et $f^- \leq |f|$ donc f^+et f^-sont intégrables dans les deux sens et

$$\int f^+\mathbf{1}_{[a,b[}d\lambda = \int_a^b f^+(t)dt, \quad \text{et} \quad \int f^-\mathbf{1}_{[a,b[}d\lambda = \int_a^b f^-(t)dt$$

d'où le résultat par linéarité.

Chapitre 6

Théorèmes limites et applications

6.1 Lemme de Fatou

Dans le chapitre précédent, nous avons déjà établi un théorème limite fondamental : le théorème de convergence monotone (ou théorème de Beppo Levi).

Théorème 6.1.1. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite croissante de* $\mathcal{M}_+$. *Alors* $f = \lim_n f_n \in \mathcal{M}_+$*et*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to+\infty} \int f_n d\mu$$

Toutefois, l'hypothèse de croissance, très pratique puisqu'elle assure l'existence de la limite dans $\overline{\mathbb{R}}_+$, est inadaptée dans bien des situations. Nous avons besoin d'un théorème valable pour une suite de fonctions générique. Le prix à payer est que l'on ne sera plus assuré de l'existence d'une limite. Par contre la fonction $\liminf f_n$ est encore définie et c'est elle qui remplacera avantageusement la fonction $\lim f_n$.

Théorème 6.1.2. *(Lemme de Fatou). Si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions mesurables positives, alors*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

Démonstration. Posons $g = \liminf f_n$. Par définition,

$$g = \lim_{n\to+\infty} \inf_{k\geq n} f_k = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{k\geq n} f_k$$

La fonction $g_n = \inf_{k\geq n} f_k$ est une fonction mesurable positive et la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en croissant vers g. Le théorème de convergence monotone assure donc :

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \int \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu$$

D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}, g_n \leq f_n$, d'où, par croissance de l'intégrale, $\int g_n d\mu \leq \int f_n d\mu$. Le second membre de cette inégalité n'a pas nécessairement de limite mais sa limite inférieure existe toujours. On obtient donc (par mpassage à la limite inférieurem) :

$$\liminf_{n\to\infty} \int g_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

La limite inférieure du premier membre de l'inégalité ci-dessus est en fait une limite d'après la première partie de la preuve, qui n'est rien d'autre que l'intégrale de la limite inférieure de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette remarque achève donc la preuve.

6.2 Ensembles et fonctions négligeables

Définition 6.2.1. *Soit ($E, \mathcal{A}, \mu$) un espace mesuré.*
(i) On dit qu'une partie N de E est négligeable pour μ (ou μ-négligeable) s'il existe $A \in \mathcal{A}$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$.
(ii) On dit que la tribu $\mathcal{A}$ est complète pour μ si toute partie μ-négligeable appartient à $\mathcal{A}$.
Définition 6.2.2. *Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. On dit qu'une propriété $\mathcal{P}$ sur E est vraie presque partout (en abrégé p.p. ou μ-p.p.) si l'ensemble des points de E où elle est fausse est négligeable.*
Une fonction f définie sur E à valeurs réelles ou complexes est dite μ-négligeable si $\{f \neq 0\}$ est négligeable.
Deux fonctions f et g définies sur E à valeurs dans un même ensemble F sont dites égales presque partout si $\{f \neq g\}$ est négligeable.
On dit qu'une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions définies sur E à valeurs dans $\mathbb{C}$ converge vers f μ-presque partout s'il existe un ensemble μ-négligeable N tel que pour tout $x \notin N$, on ait $\lim_n f_n(x) = f(x)$.

Le lemme suivant est très utile en pratique.
Lemme 6.2.1. *(Inégalité de Markov). Soit f une fonction mesurable positive sur ($E, \mathcal{A}$). Alors pour tout $\lambda > 0$, on a*

$$\mu(\{f \geq \lambda\}) \leq \frac{1}{\lambda} \int f d\mu$$

Démonstration. Il suffit d'intégrer la relation $\lambda \mathbf{1}_{\{f\geq\lambda\}} \leq f$ qui est vraie puisque f est positive.
Proposition 6.2.1. *Soit f une fonction mesurable de ($E, \mathcal{A}$) dans $\overline{\mathbb{R}}$ telle que $\int |f| d\mu < +\infty$. Alors f est finie μ-presque partout.*

Démonstration. En effet, pour tout n, on a

$$\frac{1}{n} \int |f| d\mu \geq \mu(\{|f| \geq n\}) \geq \mu(\{|f| = +\infty\})$$

Comme $\int |f| d\mu$ est fini, en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\mu(\{|f| = +\infty\}) = 0$.
Remarque 5.2.5. La réciproque de cette proposition est fausse : la fonction constante égale à 1 est finie λ-p.p. mais n'est pas intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue.
Proposition 6.2.2. *Soit f une fonction mesurable sur $(E, \mathcal{A})$ à valeurs complexes. Alors f est négligeable si et seulement si $\int |f| d\mu = 0$.*

Démonstration. Supposons tout d'abord que f est négligeable. Comme $\min(|f|, n) \leq n \mathbf{1}_{\{f\neq 0\}}$, on a

$$\int \min(|f|, n) d\mu \leq n\mu(\{f \neq 0\}) = 0$$

d'où $\int \min(|f|, n) d\mu = 0$ pour tout n. D'après le théorème de convergence monotone, on a alors

$$\int |f| d\mu = \int \lim_n \min(|f|, n) d\mu = \lim_n \int \min(|f|, n) d\mu = 0$$

Réciproquement, supposons que $\int |f| d\mu = 0$. Alors, pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mu\left(\left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \leq n \int |f| d\mu = 0$$

L'ensemble $\{|f| \neq 0\}$ s'écrit donc comme réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle :

$$\{|f| \neq 0\} = \bigcup_{n \geq 1} \left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\}$$

Il est donc également de mesure nulle.

Proposition 6.2.3. *Soit ($E, \mathcal{A}, \mu$) un espace mesuré.*
(i) Soit f et g deux fonctions mesurables positives telles que $f \leq g$ presque partout. Alors $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.
(ii) Soit f et g deux fonctions mesurables positives telles que $f = g$ presque partout. Alors $\int f d\mu = \int g d\mu$.
(iii) Soit f et g deux fonctions mesurables complexes telles que $f = g$ presque partout. Alors f est intégrable si et seulement si g l'est et, dans ce cas, $\int f d\mu \leq \int g d\mu$.

Démonstration. Pour prouver (i), on écrit

$$f = f\mathbf{1}_{\{f \leq g\}} + f\mathbf{1}_{\{f > g\}}$$

que l'on intègre par rapport à μ :

$$\int f d\mu = \int f\mathbf{1}_{\{f \leq g\}} d\mu + \int f\mathbf{1}_{\{f > g\}} d\mu$$

Par hypothèse, $f\mathbf{1}_{\{f > g\}}$ est négligeable donc son intégrale est nulle. On a donc

$$\int f d\mu = \int f\mathbf{1}_{\{f \leq g\}} d\mu$$

De même, on voit que

$$\int g d\mu = \int g\mathbf{1}_{\{f \leq g\}} d\mu$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que $f\mathbf{1}_{\{f \leq g\}} \leq g\mathbf{1}_{\{f \leq g\}}$. Le point (ii) se déduit de (i) par symétrie entre f et g.

Démontrons (iii). Si $f = g\mu$-p.p., alors $|f| = |g|\mu$-p.p., d'où $\int |f| d\mu = \int |g| d\mu$ par (ii). Par conséquent $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$ si et seulement si $g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{C}}(\mu)$. On obtient la conclusion par égalité μ-p.p. des parties positives et négatives des parties réelles et imaginaires et en appliquant (ii).

6.3 Théorème de convergence dominée

Théorème 6.3.1. *(de convergence dominée). Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur $(E,\mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que :*
(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge μ-presque partout vers une fonction f mesurable,
(ii) il existe une fonction g positive appartenant à $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\mu)$ telle que

$$\forall n \geq 1, \quad |f_n(x)| \leq g(x) \quad \mu - p.p.$$

Alors les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f sont intégrables et

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu$$

On a même $\lim_n \int |f_n - f|\, d\mu = 0$.

Démonstration. Supposons tout d'abord que la convergence de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f ait lieu partout et que les inégalités (ii) soient vraies pour tout $x \in E$. Posons $g_n = 2g - |f_n - f|$. Alors $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions mesurables positives, et d'après le lemme de Fatou,

$$2\int g d\mu = \int \liminf_n g_n d\mu \leq \liminf_n \int g_n d\mu = 2\int g d\mu - \limsup_n \int |f_n - f|\, d\mu$$

Puisque $\int g d\mu < +\infty$, on voit que $\limsup_n \int |f_n - f|\, d\mu \leq 0$. On en déduit donc que

$$\lim_{n\to+\infty} \int |f_n - f|\, d\mu = 0$$

Il en résulte que $\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$.
Passons à présent au cas général. Soit $N \in \mathcal{A}$ tel que, si $x \notin N, \lim_n f_n(x) = f(x)$ et $\mu(N) = 0$. Choisissons de plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un ensemble $N_n \in \mathcal{A}$ tel que si $x \notin N_n\, |f_n(x)| \leq g(x)$ et $\mu(E_n) = 0$. Posons $M = N \cup (\cup_n N_n) \in \mathcal{A}$. On a encore $\mu(M) = 0$. Posons $h_n = f_n \mathbf{1}_{M^c}$ et $h = f\mathbf{1}_{M^c}$. On a, pour tout $x \in E$ et tout n,

$$\lim_{m\to+\infty} h_m(x) = h(x) \quad \text{et} \quad |h_n(x)| \leq g(x)$$

La première partie de la preuve assure donc que $\lim \int |h_n - h|\, d\mu = 0$. Pour conclure, il suffit de remarquer que $h_n = f_n\mu - \text{p.p.}$ et $h = f\mu - \text{p.p.}$
Corollaire 6.3.1. *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables sur $(E,\mathcal{A})$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telle que $\sum_n \int |f_n|\, d\mu < +\infty$. Alors les fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont intégrables, la série $\sum_n f_n$ converge $\mu - p.p.$ et il existe $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ telle que*

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \quad \mu - p.p., \qquad \lim_{n\to\infty} \int \left| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \right| d\mu = 0, \qquad \int f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$$

Démonstration. Posons $g = \sum_{n\geq 1} |f_n|$. D'après le corollaire 4.2.6 (intervertion série-intégrale pour des fonctions positives),

$$\int g d\mu = \sum_{n\geq 1} \int |f_n| \, d\mu < +\infty$$

La fonction g étant intégrable, elle est finie μ-p.p. Posons

$$N = \left\{ x \in E, \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)| = +\infty \right\}$$

C'est un ensemble négligeable de $\mathcal{A}$, et si $x \notin N$, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente. Posons alors

$$f(x) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) & \text{si } x \notin N \\ 0 & \text{si } x \in N \end{cases}$$

Cette fonction est mesurable comme limite simple de la suite $\left(\mathbf{1}_{N^c} \sum_{k=1}^{n} f_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions mesurables. De plus, comme

$$\forall x \in N^c, \quad |f(x)| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |f_n(x)| = g(x)$$

et comme g est intégrable, f l'est aussi et on a

$$\int |f| d\mu \leq \int g d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int |f_n| \, d\mu$$

Enfin,

$$\begin{aligned} \int \left| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \right| d\mu &= \int \mathbf{1}_{N^c} \left| f - \sum_{k=1}^{n} f_k \right| d\mu = \int \mathbf{1}_{N^c} \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k \right| d\mu \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int \mathbf{1}_{N^c} |f_k| \, d\mu \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int |f_k| \, d\mu \end{aligned}$$

Par hypothèse, le membre de droite tend vers 0 , ce qui achève la preuve.

6.4 Intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème 6.4.1. *(continuité d'une intégrale à paramètre). Soit ($E, \mathcal{A}, \mu$) un espace mesuré, (G, d) un espace métrique et f une fonction définie sur $E \times G$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose que*
(i) pour μ-presque tout $x \in E$, la fonction $\alpha \mapsto f(x, \alpha)$ est continue sur G,
(ii) pour tout $\alpha \in G$, la fonction $x \mapsto f(x, \alpha)$ est mesurable sur $(E, \mathcal{A})$,
(iii) il existe une fonction g sur $(E, \mathcal{A})$ mesurable, positive et intégrable telle que pour tout $\alpha \in G$, on ait $|f(x, \alpha)| \leq g(x)\mu - p.p.$
Alors la fonction $F : \alpha \mapsto \int f(x, \alpha)\mu(dx)$ est définie et continue sur G.

Démonstration. Pour tout $\alpha \in G$, la fonction $x \mapsto f(x, \alpha)$ est μ-intégrable et F est donc bien définie sur G. Soit $\alpha \in G$. Montrons que F est continue au point α. Comme G est un espace métrique, il suffit de montrer que si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de G qui converge vers α, alors la suite $(F(\alpha_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α. Notons f_n la fonction définie sur E qui à tout $x \in E$ associe $f_n(x) = f(x, \alpha_n)$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait aux hypothèses du théorème de convergence dominée, d'où la conclusion.

Théorème 6.4.2. *(dérivabilité d'une intégrale à paramètre). Soit ($E, \mathcal{A}, \mu$) un espace mesuré, I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $E \times \mathbb{R}$, à valeurs réelles ou complexes. On suppose que*

(i) pour μ-presque tout $x \in E$, la fonction $\alpha \mapsto f(x, \alpha)$ est dérivable sur I,

(ii) pour tout $\alpha \in F$, la fonction $x \mapsto f(x, \alpha)$ est μ-intégrable,

(iii) il existe une fonction g sur $(E, \mathcal{A})$ intégrable et positive telle que pour μ-presque tout $x \in E$, on ait

$$\forall \alpha \in I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\right| \leq g(x)$$

Alors, pour tout $\alpha \in I$, la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, \alpha)$ est intégrable. De plus, la fonction $F : \alpha \mapsto \int f(x, \alpha)\mu(dx)$ est dérivable sur I et

$$\forall \alpha \in I, \quad F'(\alpha) = \int \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\mu(dx)$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe un ensemble de mesure nulle $N \in \mathcal{A}$ tel que si $x \notin N$, la dérivée $\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$ existe pour tout point $\alpha \in I$ et

$$\left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\right| \leq g(x)$$

Il en résulte que $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$ est μ-intégrable pour tout $\alpha \in I$.

Étudions la dérivabilité de F en $\alpha \in I$. Soit (α_n) une suite de I qui converge vers α avec $\alpha_n \neq \alpha$ pour tout n. D'après le théorème des accroissements finis, on a, si $x \notin N$,

$$|f(x, \alpha_n) - f(x, \alpha)| \leq |\alpha_n - \alpha| \sup_{\alpha \in I} \left|\frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\right| \leq |\alpha_n - \alpha|\, g(x).$$

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée à la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où la fonction h_n est définie sur E par

$$h_n(x) = \frac{f(x, \alpha_n) - f(x, \alpha)}{\alpha_n - \alpha}.$$

Cette suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $E\backslash N$ vers la fonction $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)$. Cette fonction est donc μ-intégrable. De plus, on a

$$\int \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \int \frac{f(x, \alpha_n) - f(x, \alpha)}{\alpha_n - \alpha}\mu(dx) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\alpha_n) - F(\alpha)}{\alpha_n - \alpha}.$$

Il en résulte que F est dérivable en α de dérivée

$$F'(\alpha) = \int \frac{\partial f}{\partial \alpha}(x, \alpha)\mu(dx)$$

Chapitre 7

Espaces $\mathcal{L}^p$ et L^p

Dans toute la suite $\mathbb{K}$ désignera indifféremment le corps des réels ou le corps des complexes.

Définition 7.0.1. *Pour tout réel $p > 0$, on définit*

$$\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(E, \mathcal{A}, \mu) = \left\{ f : (E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{K}, \mathcal{B}(\mathbb{K})) \text{ mesurable, } \int_E |f|^p d\mu < +\infty \right\}$$

On utilisera en général la notation $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$.

Exemple 7.0.1. *Si m désigne la mesure de comptage sur ($\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})$), alors*

$$\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(m) = l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p < +\infty \right\}.$$

Proposition 7.0.1. *Pour tout p, $\mathcal{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ est un $\mathbb{K}$-e.v.*

Démonstration. On vérifie que $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ est un s.e.v. du $\mathbb{K}$ - e.v. des fonctions mesurables de E dans $\mathbb{K}$. Il est immédiat que la fonction nulle appartient à $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Les majorations

$$|\lambda f + g|^p \leq (|\lambda||f| + |g|)^p \leq (2\max(|\lambda||f|, |g|))^p \leq 2^p|\lambda|^p|f|^p + 2^p|g|^p$$

assurent que $\lambda f + g$ est μ-intégrable.

Proposition 7.0.2. *1. Si $\mu(E) < +\infty$, alors*

$$0 < p \leq q \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu) \subset \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$$

2. *Si m est la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, alors*

$$0 < p \leq q \quad \Longrightarrow \quad l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}) \subset l^q_{\mathbb{K}}(\mathbb{N}).$$

Démonstration. 1) Si $0 < p \leq q$, alors $|f|^p \leq |f|^q \mathbf{1}_{\{|f|\geq 1\}} + \mathbf{1}_{\{|f|\leq 1\}}$. Ainsi, dès que $f \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$,

$$\int |f|^p d\mu \leq \int |f|^q d\mu + \mu(\{|f| \leq 1\}) < +\infty$$

2. Si $0 < p \leq q$, et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^p_{\mathbb{K}}(\mathbb{N})$ alors $\lim_n a_n = 0$. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|a_n| \leq 1$. Ainsi, pour tout $n \geq n_0$, $|a_n|^q \leq |a_n|^p$, d'où $\sum_{n\geq 0} |a_n|^q < +\infty$.

Remarque Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ muni de la mesure de Lebesgue λ, on remarque que

$$x \mapsto \frac{\mathbf{1}_{]0,1]}(x)}{\sqrt{x}} \in \mathcal{L}^1(\lambda)\backslash\mathcal{L}^2(\lambda) \quad \text{et} \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \in \mathcal{L}^2(\lambda)\backslash\mathcal{L}^1(\lambda).$$

Il n'existe donc pas d'inclusion entre $\mathcal{L}^1(\lambda)$ et $\mathcal{L}^2(\lambda)$.

Pour toute fonction $f : (E, \mathcal{A}) \to \mathbb{K}$ et pour tout réel $p > 0$, on définit la quantité

$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^p d\mu\right)^{1/p} \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

avec la convention $(+\infty)^{1/p} = +\infty$.

Théorème 7.0.3. *(Inégalité de Hölder). Soient $f, g : E \to \mathbb{K}$ et $p, q > 1$ tels que $1/p + 1/q = 1$ (on dit que p et q sont conjugués).*

1. Si f et g sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$alors (dans $\overline{\mathbb{R}}_+$)

$$0 \leq \int fg d\mu \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

En outre, lorsque $\|f\|_p$ et $\|g\|_q$ sont finis, l'inégalité est une égalité si et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2_+\backslash\{(0,0)\}$ tel que $\alpha f^p = \beta g^q \mu - p.p.$
2. Si $f \in \mathbb{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ et $g \in \mathbb{L}^q_{\mathbb{K}}(\mu)$ alors $fg \in \mathbb{L}^1_{\mathbb{K}}(\mu)$ et

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

En outre, l'inégalité est une égalité si et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2_+\backslash\{(0,0)\}$ tel que $\alpha|f|^p = \beta|g|^q \mu - p.p.$

Démonstration. Commençons par établir une inégalité utile dans la suite. On pose pour tout $\alpha \in]0,1[$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_\alpha(x) = x^\alpha - \alpha x$. La fonction φ_α est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$ et $\varphi'_\alpha(x) = \alpha\,(x^{\alpha-1} - 1)$. Par suite, $\varphi'_\alpha < 0$ sur $]1, +\infty[$ et $\varphi'_\alpha > 0$ sur $]0,1[$. Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_\alpha(x) \leq \varphi_\alpha(1)$ avec égalité ssi $x = 1$. En reformulant, $x^\alpha \leq \alpha x + 1 - \alpha$ avec égalité ssi $x = 1$. En posant $x = u/v$ avec $u \geq 0$ et $v > 0$, il vient

$$u^\alpha v^{1-\alpha} \leq \alpha u + (1-\alpha)v \quad \text{avec égalité ssi } u = v \tag{7.1}$$

Remarquons que cette inégalité est encore vraie pour $u, v \in \mathbb{R}_+$.
Revenons à présent à la preuve de l'inégalité de Hölder. Si $\|f\|_p$ ou $\|g\|_q$ est nulle, alors f ou g est nulle $\mu -$ p.p. et il en est de même pour fg. Dans ce cas, l'inégalité est triviale. C'est encore le cas si $\|f\|_p$ ou $\|g\|_q$ vaut $+\infty$. Supposons donc que ces deux quantités sont strictement positives et finies. On pose alors

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad \text{d'où } 1 - \alpha = \frac{1}{q}, \quad u = \frac{f^p}{\|f\|_p^p} \quad \text{et} \quad v = \frac{g^q}{\|g\|_q^q}.$$

D'après l'inégalité (7.1),

$$\frac{fg}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{f^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{g^q}{\|g\|_q^q}$$

En intégrant cette relation par rapport à μ, il vient

$$0 \leq \int fg d\mu \leq \|f\|_p\|g\|_q \left(\frac{1}{p}\int \frac{f^p}{\|f\|_p^p} d\mu + \frac{1}{q}\int \frac{g^q}{\|g\|_q^q} d\mu\right) = \|f\|_p\|g\|_q$$

L'égalité a lieu ssi $f/\|f\|_p = g/\|g\|_q \mu$-p.p.
Corollaire 7.0.1. *Si μ est une mesure de probabilité, l'application $r \mapsto \|f\|_r$ est croissante.*
Théorème 7.0.4. *(Inégalité de Minkowski). Si $p \geq 1$, alors, pour tous $f, g \in \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$,*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

L'égalité a lieu ssi
$-f = 0\mu - p.p.$ ou $g = \alpha f \mu - p.p.$, pour un $\alpha \geq 0$ si $p \geq 1$.
$-f = 0\mu - p.p.$ ou $f\bar{g} \geq 0\mu - p.p.$ si $p = 1$.

Démonstration. Si $\|f+g\|_p = 0$, l'inégalité est triviale. Sinon, on intègre par rapport à μ l'inégalité

$$|f+g|^p \leq |f||f+g|^{p-1} + |g||f+g|^{p-1} \quad \text{avec la convention } x^0 = 1 \text{ pour } x \geq 0$$

On obtient alors

$$\|f+g\|_p^p \leq \int |f||f+g|^{p-1} d\mu + \int |g||f+g|^{p-1} d\mu$$

Si $p = 1$, l'inégalité est établie. Sinon, l'inégalité de Hölder assure que (puisque $(p-1)q = p$)

$$\int |f||f+g|^{p-1} d\mu \leq \|f\|_p \left(\int |f+g|^{(p-1)q} d\mu\right)^{1/q} = \|f\|_p \|f+g\|_p^{p/q}$$

Ainsi,

$$\|f+g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|q\|_p)\, \|f+g\|_p^{p/q}$$

Il ne reste plus qu'à simplifier par $\|f+g\|_p^{p/q}$ qui est strictement positif et à remarquer que $p - p/q = 1$ pour obtenir l'inégalité souhaitée.

Remarque. Ainsi, $\|\cdot\|_p$ est une semi-norme sur l'espace $\mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu)$. Pour que ce soit une norme, il faudrait que $\|f\|_p = 0$ implique $f = 0$, ce qui est faut puisque la nullité de $\|f\|_p$ implique seulement $f = 0\mu$-p.p.

Il existe une façon simple de construire un espace vectoriel normé à partir de $\mathcal{L}^p$ et $\|\cdot\|_p$: il suffit de quotienter $\mathcal{L}^p$ par la relation d'équivalence $f \sim g$ ssi $f = g\mu$-p.p.
Définition 7.0.2. *On pose $L^p_{\mathbb{K}}(\mu) = \mathcal{L}^p_{\mathbb{K}}(\mu) \backslash \sim$. L'espace $L^p_{\mathbb{K}}(\mu)$ muni de l'application $\|\cdot\|_p$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé.*

On commet l'abus bien pratique d'identifier une fonction à sa classe d'équivalence.
Théorème 7.0.5. *Pour tout $p \geq 0$, l'espace vectoriel normé ($L^p_{\mathbb{K}}(\mu), \|\cdot\|_p$) est complet.*