الكلية متعددة التخصصات تازة
FACULTÉ POLYDISCIPLINAIRE DE TAZA

جامعة سيدي محمد بن عبد الله بفاس
UNIVERSITÉ SIDI MOHAMED BEN ABDELLAH DE FES

Travaux dirigés du Analyse 4

Filière : SMA, S3

Prof. Yazough Chihab

Année universitaire : 2025/2026

Table des matières

Chapitre 1

Séries numériques

Table des matières

Exercice 1

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants :
a) $\frac{|\sin n|}{n^2}$ b) $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$ c) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$ d) $\ln\frac{n^2+2n+3}{n^2+2n+2}$ e) $1-\cos\left(\frac{\sin n}{n}\right)$ f) $n^{\frac{1}{n^2}}-1$ g) $\frac{2^n}{n!}$ h) $\frac{(n+1)^a-n^a}{n^b}$, $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.

Solution :

4.1 a) On a : $\quad 0\leqslant\frac{|\sin n|}{n^2}\leqslant\frac{1}{n^2}$.

D'après l'exemple de Riemann ($2>1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.
b) On a, en utilisant une expression conjuguée :

$$u_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\geqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}=\frac{1}{2n^{\frac{1}{2}}}.$$

D'après l'exemple de Riemann ($1/2\leqslant 1$) et le théorème de minoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_n u_n$ diverge.
c) On a, pour $n\geqslant 3$: $0\leqslant\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

Puisque $0\leqslant\frac{5}{6}<1$, la série géométrique $\sum_n\left(\frac{5}{6}\right)^n$ converge. Par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.
d) On a :

$$\begin{aligned}\ln\frac{n^2+2n+3}{n^2+2n+2}&=\ln\left(1+\frac{1}{n^2+2n+2}\right)\\&\approx\frac{1}{n\infty}\frac{1}{n^2+2n+2}\approx\frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann ($2>1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.
e) Comme $\frac{\sin n}{n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ et que $1-\cos x \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$, on a :

$$1-\cos\left(\frac{\sin n}{n}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{2}\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$$

Et :

$$0 \leqslant \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{1}{n^2}$$

D'après l'exemple de Riemann $(2>1)$, la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge. Par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_n \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$ converge. Par théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.
f) On a :

$$n^{\frac{1}{n^2}}-1 = \mathrm{e}^{\frac{\ln n}{n^2}}-1 \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2}$$

Pour étudier la nature de la série $\sum_n \frac{\ln n}{n^2}$, nous allons essayer d'utiliser la règle $n^\alpha u_n$.

On a :

$$n^{3/2}\frac{\ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n^{1/2}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$$

par prépondérance classique. D'où, à partir d'un certain rang : $n^{3/2}\frac{\ln n}{n^2} \leqslant 1$, donc : $0 \leqslant \frac{\ln n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$.
D'après l'exemple de Riemann $(3/2>1)$, la série $\sum_n \frac{1}{n^{3/2}}$ converge. Par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_n \frac{\ln n}{n^2}$ converge. On conclut, par théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, que la série $\sum_n u_n$ converge.
g) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

D'après la règle de d'Alembert, on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.

h) On a :

$$\begin{aligned} u_n = \frac{(n+1)^a - n^a}{n^b} &= n^{a-b}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^a - 1\right) \\ &= n^{a-b}\left(\frac{a}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \end{aligned}$$

- Si $a \neq 0$, alors : $u_n \underset{n\infty}{\sim} n^{a-b}\frac{a}{n} = an^{a-b-1}$.
Il en résulte, d'après l'exemple de Riemann et le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, que la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si $a-b-1 < -1$, c'est-à-dire $a < b$.
- Si $a = 0$, alors $u_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc la série $\sum_n u_n$ converge.
Finalement, la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si :

$$a < b \text{ ou } a = 0.$$

Exercice 2

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants :
a) $\frac{1}{n^2 \ln n}$ b) $\frac{\ln n}{n}$ c) $\frac{\ln n}{n^2}$ d) $\frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ e) $\frac{1}{n \ln n}$ f) $\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Solution :

a) On a, pour $n \geqslant 3$: $0 \leqslant \frac{1}{n^2 \ln n} \leqslant \frac{1}{n^2}$.
D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_n \frac{1}{n^2 \ln n}$ converge.
b) On a, pour $n \geqslant 3$: $\frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0$.
D'après l'exemple de Riemann et le théorème de minoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_n \frac{\ln n}{n}$ diverge. c) On a : $\quad n^{3/2}u_n = n^{3/2}\frac{\ln n}{n^2} = \frac{\ln n}{n^{1/2}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, par prépondérance classique, d' où, à partir d' un certain rang : $n^{3/2}u_n \leqslant 1$, et donc : $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n^{3/2}}$.
D'après l'exemple de Riemann ($3/2 > 1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_n \frac{\ln n}{n^2}$ converge.
d) On a : $\quad nu_n = n\frac{1}{\sqrt{n}\ln n} = \frac{\sqrt{n}}{\ln n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$, par prépondérance classique, d' où, à partir d'un certain rang : $nu_n \geqslant 1$, et donc : $u_n \geqslant \frac{1}{n} \geqslant 0$.
D'après l'exemple de Riemann et le théorème de minoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_n \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$ diverge.
e) Considérons l'application

$$f : \Big[2; +\infty\Big[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{x \ln x}$$

Il est clair que f est continue, décroissante, $\geqslant 0$. D'après le cours sur la comparaison série/intégrale, la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si l'application f est intégrable sur $[\ 2; +\infty\ [$.
On a, pour tout $X \in [2; +\infty[$:

$$\int_2^X f(x)\mathrm{d}x = \int_2^X \frac{1}{x \ln x}\,\mathrm{d}xy = \ln x \int_{\ln 2}^{\ln X} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y$$
$$= [\ln y]_{\ln 2}^{\ln X} = \ln\ln X - \ln\ln 2 \underset{x \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ainsi, f n'est pas intégrable sur $[\ 2; +\infty\ [$ et on conclut que la série $\sum_n \frac{1}{n \ln n}$ diverge.
f) Considérons l'application

$$g : \Big[2; +\infty\Big[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{x(\ln x)^2}$$

Il est clair que g est continue, décroissante, $\geqslant 0$.
D'après le cours sur la comparaison série/intégrale, la série $\sum_n u_n$ converge si et seulement si l'application g est intégrable sur $[2; +\infty[$. On a, pour tout $X \in [2; +\infty[$:

$$\begin{aligned}\int_2^X g(x)\mathrm{d}x &= \int_2^X \frac{1}{x(\ln x)^2}\,\mathrm{d}x \underset{y=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{\ln x} \frac{1}{y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \left[-\frac{1}{y}\right]_{\ln 2}^{\ln x} = -\frac{1}{\ln X} + \frac{1}{\ln 2} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\ln 2}\end{aligned}$$

Ainsi, g est intégrable sur $[2;+\infty[$, et on conclut que la série $\sum_n \frac{1}{n(\ln n)^2}$ converge.

Exercice 3

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+^*$, convergente. Déterminer la nature des séries de termes généraux :
$u_n = \frac{a_n}{1+a_n}$, $\quad v_n = \frac{\operatorname{ch} a_n - 1}{a_n}$, $\quad w_n = a_n^2$.

Solution :

On a, pour tout n : $0 \leqslant u_n = \frac{a_n}{1+a_n} \leqslant a_n$.
Comme la série $\sum_n a_n$ converge, par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.
- Puisque la série $\sum_n a_n$ converge, on a : $a_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, donc :

$$v_n = \frac{\operatorname{ch} a_n - 1}{a_n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2}a_n^2}{a_n} = \frac{1}{2}a_n \geqslant 0.$$

Comme la série $\sum_n a_n$ converge, par théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_n v_n$ converge.
- Puisque la série $\sum_n a_n$ converge, on a : $a_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, à partir d'un certain rang : $0 \leqslant a_n \leqslant 1$, d'où :

$$0 \leqslant w_n = a_n^2 \leqslant a_n$$

Comme la série $\sum_n a_n$ converge, par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_n w_n$ converge.

Exercice 5

Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans les exemples suivants : a) $\frac{(-1)^n n}{n^3+n+1}$, b) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, c) $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$, d) $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Solution :

4.5 a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| = \frac{n}{n^3+n+1} \leqslant \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$.

D'après l'exemple de Riemann ($2>1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_n |u_n|$ converge. Ainsi, la série $\sum_n u_n$ converge absolument, donc converge.
b) La série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ est alternée, $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$ et la suite $(|u_n|)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, donc, d'après le TSCSA, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
c) Effectuons un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{n}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

D'après le TSCSA, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.
Par théorème de comparaison, puisque la série $\sum_n \frac{1}{n^2}$ converge et est à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_n O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument, donc converge.
Par addition de deux séries convergentes, on conclut que la série $\sum_n u_n$ converge.
d) Effectuons un développement asymptotique :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

D'après le TSCSA, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge.
La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ diverge.
Par théorème de comparaison, puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ converge et est à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_n O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ est absolument convergente, donc convergente.
Par addition d'une série divergente et de deux séries convergentes, on conclut que la série $\sum u_n$ diverge.

Exercice 6

1-Soit $(u_n)_n$ une suite réelle. On suppose que les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n u_n^2$ convergent.
a) Montrer que, à partir d'un certain rang, $u_n \neq -1$.
b) Établir que la série $\sum_n \frac{u_n}{1+u_n}$ converge.
2-Soit $\sum_{n\geqq 1} u_n$ une série à termes dans $\mathbb{R}_+$, convergente.
Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Solution :

1- a) Puisque la série $\sum_n u_n$, converge, on a : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, à partir d'un certain rang : $u_n \neq -1$.
b) D'après a), la série de terme général $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ est bien définie à partir d'un certain rang.
On a, pour tout n :

$$|v_n - u_n| = \left|\frac{u_n}{1+u_n} - u_n\right| = \frac{u_n^2}{|1+u_n|} \underset{n\infty}{\sim} u_n^2$$

Comme la série de terme général u_n^2 converge, d'après le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série de terme général $|v_n - u_n|$ converge. Ainsi, la série de terme général $v_n - u_n$ est absolument convergente, donc convergente. Enfin, comme, pour tout n : $v_n = (v_n - u_n) + u_n$, par addition de deux séries convergentes, on conclut que la série de terme général v_n est convergente. 2-

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} u_n\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisque les séries $\sum_n u_n$ et $\sum_n \frac{1}{n^2}$ sont convergentes et à termes $\geqslant 0$, on a, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} u_n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

D'où :

$$\forall N \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \sum_{n=1}^{N} \frac{\sqrt{u_n}}{n} \leqslant \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ceci montre que les sommes partielles de la série à termes $\geqslant 0$, $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$, sont majorées.
D'après un lemme du cours, on conclut que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sqrt{u_n}}{n}$ converge.

Exercice 7

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$u_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si} \quad n \not\equiv 0[3] \\ \frac{-2}{n} & \text{si} \quad n \equiv 0[3] \end{cases}$$

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge et calculer sa somme.

solution

4.22 - Groupons les termes trois par trois.

On a, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{3p} u_n &= \left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{2}{6}\right)+\cdots \\
&+\left(\frac{1}{3p-2}+\frac{1}{3p-1}-\frac{2}{3p}\right) \\
&=\sum_{n=1}^{3p}\frac{1}{n}-3\sum_{k=1}^{p}\frac{1}{3k}=\sum_{n=1}^{3p}\frac{1}{n}-\sum_{n=1}^{p}\frac{1}{n} \\
&=\sum_{n=p+1}^{3p}\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{2p}\frac{1}{p+i}=\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{2p}\frac{1}{1+\frac{i}{p}}
\end{aligned}$$

En notant $q=2p$, on a donc :

$$\sum_{n=1}^{3p} u_n = 2\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{1+\frac{2i}{q}}$$

On reconnait une somme de Riemann, pour la fonction $f : x \longmapsto \frac{1}{1+2x}$, qui est continue sur le segment $[0;1]$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q}\frac{1}{1+\frac{2i}{q}} &\underset{q\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{1}{1+2x}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{1}{2}\ln(1+2x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3
\end{aligned}$$

On a donc, par suite extraite : $\sum_{n=1}^{3p} u_n \underset{p\infty}{\longrightarrow} \ln 3$. - Comme $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, on a alors aussi :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{3p+1} u_n &= \left(\sum_{n=1}^{3p} u_n\right)+u_{3p+1} \underset{p\infty}{\longrightarrow} \ln 3 \\
\sum_{n=1}^{3p+2} u_n &= \left(\sum_{n=1}^{3p} u_n\right)+u_{3p+1}+u_{3p+2} \underset{p\infty}{\longrightarrow} \ln 3.
\end{aligned}$$

Comme les $3p, 3p+1, 3p+2, p$ décrivant $\mathbb{N}^*$, recouvrent tous les entiers ($\geqslant 3$), on déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \underset{n\infty}{\longrightarrow} \ln 3.$$

Exercice 8

On considère la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_1=1$ et :

$$\forall n \geqslant 1, u_{n+1}=\sqrt{u_n^2+\frac{1}{n}}$$

a) Déterminer la limite de u_n et un équivalent simple de u_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.
b) Déterminer la nature des séries de termes généraux $\frac{1}{u_n}$ et $\frac{(-1)^n}{u_n}$.

solution

a) - Une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \geqslant 1, u_n$ existe et $u_n \geqslant 1$.
- On a, pour tout $n \geqslant 2$: $u_n^2 = u_{n-1}^2 + \frac{1}{n-1}$,
d'où, en réitérant et en additionnant :

$$u_n^2 = u_1^2 + \underbrace{(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1})}_{\text{noté } \mathrm{H}_{n-1}},$$

d'où, puisque $u_n > 0$: $u_n = \sqrt{1 + \mathrm{H}_{n-1}}$.
Comme $\mathrm{H}_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on déduit : $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
De plus, on sait :

$$\mathrm{H}_{n-1} \underset{n\infty}{\approx} \ln(n-1) = \ln n + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) \underset{n\infty}{\sim} \ln n,$$

donc : $u_n \underset{n\infty}{\sim} \sqrt{\ln n}$.
b) 1) On a : $\frac{1}{u_n} \approx \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \geqslant 0$.
Comme $n\frac{1}{\sqrt{\ln n}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$, à partir d'un certain rang : $n\frac{1}{\sqrt{\ln n}} \geqslant 1$, donc : $\frac{1}{\sqrt{\ln n}} \geqslant \frac{1}{n}$. D'après l'exemple de Riemann et le théorème de minoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on déduit que la série $\sum_n \frac{1}{\sqrt{\ln n}}$ diverge.
D'après le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ diverge.
2) La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{u_n}$, est alternée, son terme général tend vers 0 (car $u_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} +\infty$) et la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante, car :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + \frac{1}{n}} \geqslant u_n.$$

D'après le TSCSA, on conclut que la série de terme général $\frac{(-1)^n}{u_n}$ converge.

Exercice 9

Existence et calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ où $u_n = \frac{1}{n(2n+1)}$.

solution

4.47 1) Existence :
On a : $u_n = \frac{1}{n(2n+1)} \approx \frac{1}{2n^2} \geqslant 0$. D'après l'exemple de Riemann ($2 > 1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
2) Calcul :
Essayons de faire apparaître un télescopage dans l'expression des sommes partielles, en utilisant une décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle.

On a facilement la décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{X(2X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{2}{2X+1}$$

D'où, pour tout $N \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} u_n = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{2n+1} \right) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n+1} \\
= \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 2 \left(\sum_{p=2}^{2N+1} \frac{1}{p} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} \right) = 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - 2 \sum_{n=2}^{2N+1} \frac{1}{n} \\
=2(\ln N + \gamma + \underset{N\infty}{o}(1)) - 2(\ln(2N+1) + \gamma + o(1)) + 2 \\
=2 \ln \frac{N}{2N+1} + 2 + o(1) \underset{N\infty}{2} \ln \frac{1}{2} + 2 = 2 - 2 \ln 2.
\end{aligned}$$

On conclut que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge (ce qui était déjà acquis d'après 1)), et que : $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 2 - 2 \ln 2$.

Chapitre 2

Suite et Série des fonctions

Exercice 1

Étudier (convergence simple, convergence uniforme, convergence uniforme sur des parties de l'ensemble de départ) les suites d'applications suivantes :
a) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{n+1}{n^2+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$
b) $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{nx^2}{1+nx}, n \in \mathbb{N}^*$
c) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{x}{x^2+n^2}, n \in \mathbb{N}^*$
d) $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x^n(1-x), n \in \mathbb{N}^*$
e) $f_n : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{nx^3}{1+n^2x}, n \in \mathbb{N}$.

Solution :

a) 1) Convergence simple :
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé : $f_n(x) = \frac{n+1}{n^2+x^2} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, donc : $f_n \underset{n\infty}{\xrightarrow{C.S.}} 0$.
2) Convergence uniforme :
On a : $\forall n \in \mathbb{N}^+, \forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x)| = \frac{n+1}{n^2+x^2} \leqslant \frac{n+1}{n^2}$, donc :

$$\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{n+1}{n^2} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$$

On conclut : $f_n \underset{n\infty}{\xrightarrow{C.U}} 0$, et donc $f_n \underset{n\infty}{\xrightarrow{C.S.}} 0$, ce qui rend l'étude de 1) inutile, à condition de prévoir que la limite sera 0 . b) 1) Convergence simple :
Soit $x \in [0;1]$. Si $x \neq 0$, alors : $f_n(x) = \frac{nx^2}{1+nx} \underset{n\infty}{\sim} \frac{nx^2}{nx} = x$, donc : $f_n(x) \underset{n\infty}{\longrightarrow} x$. Si $x = 0$, alors : $f_n(x) = 0 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$. On conclut : $f_n \underset{n\infty}{\xrightarrow{C.S.}} f$, où : $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto x$. 2) Convergence uniforme :
On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;1]$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx^2}{1+nx} - x\right| = \frac{x}{1+nx} \leqslant \frac{1}{n}$$

donc :

$$\|f_n - f\|_\infty \leqslant \frac{1}{n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$$

On conclut : $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.U.} f$, ce qui semble rendre l'étude de 1) inutile. Cependant, pour former $\|f_n - f\|_\infty$, il faut d'abord connaître f, ce qui nécessite l'étude de la convergence simple. c) 1) Convergence simple :
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé : $f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, donc : $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.S.} 0$. 2) Convergence uniforme :
1^{re} méthode :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application f_n est impaire, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, et, pour tout $x \in [0; +\infty[$:

$$f_n'(x) = \frac{x^2 + n^2 - x(2x)}{(x^2+n^2)^2} = \frac{n^2 - x^2}{(x^2+n^2)^2},$$

On a donc : $\|f_n\|_\infty = f_n(n) = \frac{n}{2n^2} = \frac{1}{2n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, et on conclut : $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.U.} 0$, donc $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.S.} 0$, ce qui rend l'étude de 1) inutile.
2^{ε} méthode :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappelons : $\forall (a, b) \in (\mathbb{R}_+)^2, a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^+, 0 \leqslant f_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2} \leqslant \frac{x}{2nx} = \frac{1}{2n},$$

d'où, puisque $f_n(0) = 0$ et que f_n est impaire :

$$\|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{2n},$$

et on termine comme dans la 1^{re} méthode. d) 1) Convergence simple :
Soit $x \in [0; 1]$ fixé. Si $x \neq 1$, alors : $f_n(x) = x^n(1-x) \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.
Si $x = 1$, alors : $f_n(x) = 0 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.
On conclut : $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.S.} 0$.
2) Convergence uniforme :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application f_n est de classe C^1 sur $[0; 1]$ et, pour tout $x \in [0; 1]$:

$$f_n'(x) = nx^{n-1} - (n+1)x^n = x^{n-1}(n - (n+1)x)$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \|f_n\|_\infty &= f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ &= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

et on conclut : $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.U} 0$, ce qui rend l'étude de 1) inutile. e) 1) Convergence simple :
Soit $x \in [0; +\infty[$ fixé.
Si $x \neq 0$, alors : $f_n(x) = \frac{nx^3}{1+n^2x} \underset{n\infty}{\sim} \frac{x^2}{n} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.
Si $x = 0$, alors : $f_n(x) = 0 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.
On conclut : $f_n \xrightarrow[no\infty]{C.S} 0$. 2) Convergence uniforme :

- On remarque que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n - 0$ n'est pas bornée sur $[0; +\infty\,[$, car $f_n(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$,
donc : $f_n \xrightarrow[n\infty]{c.\mu} 0$ sur $[0; +\infty[$.
- Soit $b \in [0; +\infty[$ fixé.
On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, \forall x \in [0; b], |f_n(x)| = \frac{nx^3}{1+n^2x} \leqslant \frac{x^2}{n} \leqslant \frac{b^2}{n},$$

donc :

$$\|f_n\|_\infty^{[0;b]} \leqslant \frac{b^2}{n} \xrightarrow[n\infty]{} 0$$

On conclut :
$f_n \xrightarrow[n\infty]{c.u} 0$ sur tout $[a; b], b \in [0; +\infty[$ fixé.

Exercice 2

Déterminer les limites suivantes, lorsque l'entier n tend vers l'infini :
a) $\lim_{n\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{\pi}}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
b) $\lim_{n\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n}{nx^2+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x$
c) $\lim_{n\infty} \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+x^n+1}\,\mathrm{d}x$.

Solution :

Nous allons essayer, dans ces exemples, d'appliquer le théorème de convergence dominée.
a) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f_n : \Big[0; +\infty\Big[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^+$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $[0; +\infty[$.
- Pour tout $x \in [0; +\infty[$ fixé :

$$f_n(x) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{x}}}{1+x^2} \xrightarrow[n\infty]{} \frac{1}{1+x^2}$$

En notant $f : \big[0; +\infty\big[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$, on a donc : $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.S} f$.
- f est continue par morceaux (car continue) sur $[0; +\infty[$.
- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \Big[0; +\infty\Big[, |f_n(x)| = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$$

et l'application $x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}$ est continue par morceaux (car continue), $\geqslant 0$, intégrable sur $[0;+\infty[$ car $\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$, exemple de Riemann en $+\infty(2>1)$ et théorème d'équivalence pour des fonctions $\geqslant 0$.
Ainsi, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$vérifie l'hypothèse de domination.
D'après le théorème de convergence dominée, f est intégrable sur $[0;+\infty[$ et :

$$\int_0^{+\infty} f_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\operatorname{Arctan} x]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$$

On conclut : $\lim_{n\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{x}}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$.
b) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f_n : \Big[1;+\infty\Big[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{n}{nx^2+\mathrm{e}^x}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $[1;+\infty[$.
- On a, pour tout $x \in [1;+\infty[$ fixé :

$$f_n(x) = \frac{n}{nx^2+\mathrm{e}^x} = \frac{1}{x^2+\frac{\mathrm{e}^x}{n}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{x^2}$$

Ainsi : $f_n \underset{n\infty}{\xrightarrow{C.S.}} f$, où : $f : \big[1;+\infty\big[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{1}{x^2}$.
- f est continue par morceaux (car continue) sur $[1;+\infty[$.
- On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \Big[1;+\infty\Big[, |f_n(x)| = \frac{n}{nx^2+\mathrm{e}^x} \leqslant \frac{1}{x^2},$$

et $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ est continue par morceaux (car continue), $\geqslant 0$, intégrable sur $[1;+\infty[$ (exemple de Riemann en $+\infty, 2>1$). Ceci montre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie l'hypothèse de domination. D'après le théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\int_1^{+\infty} f_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_1^{+\infty} f = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1$$

On conclut : $\lim_{n\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n}{nx^2+\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = 1$.
c) Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^+$:

$$f_n : \Big[0;+\infty\Big[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{x^n}{x^{2n}+x^n+1}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux (car continue) sur $[0;+\infty[$.
- Soit $x \in [0;+\infty[$.
Si $0 \leqslant x < 1$, alors : $f_n(x) = \frac{x^n}{x^{2n}+x^n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$.
Si $x = 1$, alors : $f_n(x) = \frac{1}{3} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}$.
Si $x > 1$, alors :

$$f_n(x)=\frac{x^n}{x^{2n}+x^n+1}\underset{n\infty}{\sim}\frac{x^n}{x^{2n}}=x^{-n}\underset{n\infty}{\longrightarrow}0$$

Ainsi : $f_n \xrightarrow[n\infty]{\text{C.S.}} f$ sur $[0;+\infty[$, où :

$$f:\left[0;+\infty\right[\longrightarrow\mathbb{R},x\longmapsto\left\{\begin{array}{ccc}0 & \text{si} & x\neq 1\\ 1/3 & \text{si} & x=1\end{array}\right.$$

- f est continue par morceaux sur $[0;+\infty[$.
- Soient $n\in\mathbb{N}^+, x\in[0;+\infty[$
Si $0\leqslant x\leqslant 1$, alors :

$$0\leqslant f_n(x)=\frac{x^n}{x^{2n}+x^n+1}\leqslant x^n\leqslant 1$$

Si $x>1$, alors :

$$0\leqslant f_n(x)\leqslant\frac{x^n}{x^{2n}}=\frac{1}{x^n}\leqslant\frac{1}{x^2}\text{ si } n\geqslant 2$$

Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}^+-\{1\},\forall x\in\left[0;+\infty\right[,\left|f_n(x)\right|\leqslant\varphi(x)$, où :

$$\varphi:\left[0;+\infty\right[\longrightarrow\mathbb{R},x\longmapsto\left\{\begin{array}{ccc}1 & \text{si} & 0\leqslant x\leqslant 1\\ \frac{1}{x^2} & \text{si} & 1<x\end{array}\right.$$

L'application φ est continue par morceaux, $\geqslant 0$, intégrable sur $[0;+\infty[$ (exemple de Riemann en $+\infty, 2>1$). Ceci montre que $(f_n)_{n\geqslant 2}$ vérifie l'hypothèse de domination.
D'après le théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\int_0^{+\infty}f_n\underset{n\infty}{\longrightarrow}\int_0^{+\infty}f=0$$

On conclut : $\lim_{n\infty}\int_0^{+\infty}\frac{x^n}{x^{2n}+x^n+1}\,\mathrm{d}x=0$.

Exercice 3

Soit $f:[0;1]\longrightarrow\mathbb{C}$ continue par morceaux. Montrer :

$$\int_0^1 f(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{d}x\underset{n\infty}{\longrightarrow}\int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Solution :

Essayons d'appliquer le théorème de convergence dominée.
Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}^+$:

$$f_n:[0;1]\longrightarrow\mathbb{C},x\longmapsto f_n(x)=f(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}^+$, f_n est continue par morceaux, comme produit de deux applications continues par morceaux.
- Pour tout $x \in [0;1]$, et pour $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned} f_n(x) &= f(x)\exp\left(n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)\right) \\ &= f(x)\exp\left(n\left[-\frac{x}{n}+\underset{n\infty}{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right]\right) \\ &= f(x)\exp(-x+o(1)) \underset{n\infty}{\longrightarrow} f(x)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

En notant $g : [0;1] \longrightarrow \mathbb{C}, x \longmapsto f(x)\mathrm{e}^{-x}$, on a donc : $f_n \underset{n\infty}{\overset{C.S}{\longrightarrow}} g$ sur $[0;1]$.
- L'application g est continue par morceaux, comme produit de deux applications continues par morceaux.
- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^2$ et tout $x \in [0;1]$:

$$|f_n(x)| = |f(x)|\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leqslant |f(x)|,$$

et $|f|$ est continue par morceaux, $\geqslant 0$, intégrable sur $[0;1]$ car continue par morceaux sur ce segment.
Du théorème de convergence dominée, on déduit :

$$\int_0^1 f_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f$$

c'est-à-dire :

$$\int_0^1 f(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \,\mathrm{d}x \underset{n\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 f(x)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

Exercice 4

Étudier (convergences simple, absolue, normale, uniforme) les séries d'applications $\sum_n f_n$ suivantes :
a) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{\sin(nx)}{n^2+x^2}, n \in \mathbb{N}^+$
b) $f_n : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto n^2x^n(1-x)^n, n \in \mathbb{N}$
c) $f_n : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{nx^2}{n^3+x^2}, n \in \mathbb{N}^*$
d) $f_n : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{x}{n}\mathrm{e}^{-n^2x^2}, n \in \mathbb{N}^+$
e) $f_n : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{n+x}{x^2+n^2}, n \in \mathbb{N}^*$
f) $f_n : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{(-1)^n}{x^2+n^2}, n \in \mathbb{N}^*$
g) $f_n : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{(-1)^n}{x^2+n}, n \in \mathbb{N}^*$..

Coerrection :

a) On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f_n(x)| = \frac{|\sin nx|}{n^2+x^2} \leqslant \frac{1}{n^2+x^2} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{+}, \|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}$$

D'après l'exemple de Riemann $(2>1)$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge. Il en résulte, d'après le théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, que la série $\sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty$ converge.
On conclut que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, donc uniformément, absolument, simplement.
b) L'étude des variations de $x \longmapsto x(1-x)$ sur $[0;1]$ montre : $\forall x \in [0;1], |x(1-x)| \leqslant \frac{1}{4}$. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0;1], |f_n(x)| \leqslant \frac{n^2}{4^n}$, d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_\infty \leqslant \frac{n^2}{4^n}$$

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = \frac{n^2}{4^n}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$$

et : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{4^{n+1}} \frac{4^n}{n^2} = \frac{(n+1)^2}{n^2} \frac{1}{4} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} < 1$. D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
D'après le théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \|f_n\|_\infty$ converge.
Ceci montre que la série $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge normalement sur $[0;1]$, donc uniformément, absolument, simplement.
c) 1) Convergence simple, convergence absolue :
La convergence absolue revient à la convergence simple, puisque les f_n sont toutes $\geqslant 0$. Soit $x \in [0;+\infty[$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(x) = \frac{nx^2}{n^3+x^2} \leqslant \frac{nx^2}{n^3} = \frac{x^2}{n^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann ($2>1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.

Ceci montre que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement et absolument sur $[0;+\infty[$.
2) Convergence normale, convergence uniforme :
- On a : $\|f_n\|_\infty \geqslant |f_n(n)| = \frac{n^3}{n^3+n^2} = \frac{n}{n+1} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1$, donc :

$$\|f_n\|_\infty \underset{n\infty}{\not\longrightarrow} 0.$$

D'après le cours, il en résulte que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur $[0;+\infty[$, donc ne converge pas normalement sur $[0;+\infty[$.
- Soit $a \in [0;+\infty[$ fixé.

On a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0;a], |f_n(x)| = \frac{nx^2}{n^3+x^2} \leqslant \frac{na^2}{n^3} = \frac{a^2}{n^2},$$

donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{+}, \|f_n\|_{\infty}^{[0;a]} \leqslant \frac{a^2}{n^2}.$$

Il en résulte, d'après l'exemple de Riemann ($2>1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, que la série $\sum_{n\geqslant 1}\|f_n\|_{\infty}^{[0;a]}$ converge.
Ceci montre que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur tout $[0;a], a \in [0;+\infty[$ fixé. d) 1) Convergence simple, convergence absolue :
La convergence absolue revient à la convergence simple, puisque les f_n sont toutes $\geqslant 0$.
Soit $x \in [0;+\infty[$.
Si $x>0$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^{\star}$:

$$0 \leqslant f_n(x) = \frac{x}{n}\mathrm{e}^{-n^2x^2} \leqslant x\mathrm{e}^{-nx^2} = x\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)^n$$

Puisque $\left|\mathrm{e}^{-x^2}\right| < 1$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)^n$ converge, donc, par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.
Si $x=0$, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^{+}, f_n(x)=0$, donc la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.
Ceci montre que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement et absolument sur $[0;+\infty[$.
2) Convergence normale, convergence uniforme :
Soit $n \in \mathbb{N}^{+}$. L'application f_n est de classe C^1 sur $[0;+\infty[$ et, pour tout $x \in \Big[0;+\infty\Big[$: $f_n'(x) = \frac{1}{n}\left(1-2n^2x^2\right)\mathrm{e}^{-n^2x^2}$, On a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{+}, \|f_n\|_{\infty} = f_n\left(\frac{1}{n\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{n^2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{n^2\sqrt{2\mathrm{e}}}$$

D'après l'exemple de Riemann $(2>1)$, la série $\sum_{n\geqslant 1}\|f_n\|_{\infty}$ converge.
Ceci montre que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[\,0;+\infty[$, et rend l'étude de 1) inutile.
e) 1) Convergence simple, convergence absolue :
La convergence absolue revient à la convergence simple, puisque les f_n sont toutes $\geqslant 0$. Soit $x \in [0;+\infty[$ fixé.
On a :

$$f_n(x) = \frac{n+x}{n^3+x^2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \geqslant 0$$

D'après l'exemple de Riemann ($2>1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge. Ceci montre que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolument et simplement sur $[0;+\infty[$.
2) Convergence normale, convergence uniforme :
Soit $n \in \mathbb{N}^{*}$. L'application f_n est de classe C^1 sur $[0;+\infty[$ et, pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$f_n'(x) = \frac{\left(n^3+x^2\right)-(n+x)2x}{\left(n^3+x^2\right)^2} = -\frac{x^2+2nx-n^3}{\left(n^3+x^2\right)^2}$$

Par résolution d'une équation du second degré, on déduit le tableau de variations de f_n, en notant $x_n = -n+\sqrt{n^3+n^2}$: On a donc :

$$\begin{aligned}\|f_n\|_\infty &= f_n\left(x_n\right) \\ &= \frac{\sqrt{n^3+n^2}}{2n^3+2n^2-2n\sqrt{n^3+n^2}} = \frac{1}{2\left(\sqrt{n^3+n^2}-n\right)} \\ &= \frac{1}{2n^{3/2}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)} \approx \frac{1}{2n^{3/2}} \geqslant 0\end{aligned}$$

D'après l'exemple de Riemann ($3/2>1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1}\|f_n\|_\infty$ converge. Ceci montre que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[0;+\infty[$, donc uniformément, absolument, simplement, et rend inutile l'étude de 1). f) On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in \left[0;+\infty\right[, |f_n(x)| = \frac{1}{x^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2},$$

donc :

$$\forall n\in\mathbb{N}^+, \|f_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

D'après l'exemple de Riemann ($2>1$) et le théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1}\|f_n\|_\infty$ converge.
Ceci montre que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge normalement sur $[0;+\infty[$, donc uniformément, absolument, simplement. g) 1) Convergence simple :
Soit $x\in[0;+\infty[$ fixé. La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{x^2+n}$ est alternée, $\left|\frac{(-1)^n}{x^2+n}\right| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, et la suite $\left(\frac{1}{x^2+n}\right)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. D'après le TSCSA, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge. Ceci montre que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$. 2) Convergence absolue, convergence normale :
Soit $x\in[0;+\infty[$ fixé. On a : $|f_n(x)| = \frac{1}{x^2+n} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n} \geqslant 0$. D'après l'exemple de Riemann et le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1}|f_n(x)|$ diverge. Ceci montre que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge absolument sur aucune partie non vide de $[0;+\infty[$. Il en résulte que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge normalement sur aucune partie non vide de $[0;+\infty[$. 3) Convergence uniforme :
Soit $n\in\mathbb{N}^\star$ fixé. Puisque, pour tout $x\in[0;+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ relève du TSCSA, en notant $R_n(x)$ le reste d' ordre n, on a, pour tout $x\in[0;+\infty[$:

$$|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \frac{1}{x^2+(n+1)} \leqslant \frac{1}{n+1},$$

donc :

$$\|R_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Il en résulte : $\|R_n\|_\infty \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, et on conclut, d'après le cours, que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0;+\infty[$.

Exercice 5

On note, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $f_n : \left[0;+\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}, x\longmapsto (-1)^n\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n+x}$.

a) Étudier les convergences de la série d'applications $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.
b) Montrer que la somme $S=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est continue sur $[0;+\infty[$.

Solution :

a) 1) Convergence simple :
Soit $x\in[0;+\infty[$ fixé. La série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ est alternée, $|f_n(x)|=\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n+x} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, et la suite $(|f_n(x)|)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. D'après le TSCSA, il en résulte que la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge. On conclut : $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
2) Convergence absolue :
Soit $x\in[0;+\infty[$ fixé.
- Cas $x\neq 0$. On a :

$$\forall n\in\mathbb{N}, |f_n(x)|=\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n+x}\leqslant \mathrm{e}^{-nx}=\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^n.$$

Comme $|\mathrm{e}^{-x}|<1$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1}\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^n$ converge. Par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1}|f_n(x)|$ converge.
- Cas $x=0$. On a : $\forall n\in\mathbb{N}^+, |f_n(x)|=\frac{1}{n}$, donc la série $\sum_{n\geqslant 1}|f_n(x)|$ diverge.
On conclut : $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge absolument sur $]0;+\infty[$, mais non sur $[0;+\infty[$.

3) Convergence normale :
- Étude sur $10;+\infty[$:
Soit $n\in\mathbb{N}^+$. Comme $|f_n(x)|=\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n+x} \underset{x\longrightarrow 0+}{\longrightarrow} \frac{1}{n}$, on a : $\|f_n\|_\infty \geqslant \frac{1}{n}$, et donc, d'après l'exemple de Riemann et le théorème de minoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1}\|f_n\|_\infty^{10;+\infty}$ diverge.
Ceci montre que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ ne converge pas normalement sur $]0;+\infty[$.
- Étude sur $[a;+\infty[, a\in]0;+\infty[$ fixé :
Soit $a\in]0;+\infty[$ fixé. On a : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[a;+\infty[$,

$$|f_n(x)|=\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n+x}\leqslant\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}\leqslant \mathrm{e}^{-nx}\leqslant \mathrm{e}^{-na},$$

d'où :

$$\forall n\in\mathbb{N}^+, \|f_n\|_\infty^{|a;+\infty|}\leqslant\left(\mathrm{e}^{-a}\right)^n.$$

Puisque $|\mathrm{e}^{-\alpha}|<1$, la série géométrique $\sum_{n\geqslant 1}\left(\mathrm{e}^{-\alpha}\right)^n$ converge.
Par théorème de majoration pour des séries à termes $\geqslant 0$, on conclut que $\sum_{n\geqq 1} f_n$ converge normalement sur $[a;+\infty[$, pour tout $a\in]0;+\infty[$ fixé.
4) Convergence uniforme :
Puisque, pour tout $x\in[0;+\infty[$, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ relève du TSCSA, on a, en notant R_n le reste d'ordre n : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \forall x\in[0;+\infty[$,

$$|R_n(x)|\leqslant|f_{n+1}(x)|=\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)x}}{(n+1)+x}\leqslant\frac{1}{n+1},$$

d'où :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|R_n\|_\infty \leqslant \frac{1}{n+1},$$

puis :

$$\|R_n\|_\infty \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Ceci montre que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0;+\infty[$.
b) Puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^+$, f_n est continue sur $[0;+\infty[$ et que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur $[0;+\infty[$, d'après un théorème du cours, on conclut que la somme S est continue sur $[0;+\infty[$.

Exercice 7

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^+$: $f_n : \Big[0;+\infty\Big[\longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto \frac{\ln(n+x)}{n^2}$.
a) Étudier la convergence simple de la série d'applications $\sum_{n\geqslant 1} f_n$.
On note S la somme.
b) Montrer que S est de classe C^2 sur $[0;+\infty[$ et exprimer, pour tout $x \in [0;+\infty[$, $S'(x)$ et $S''(x)$ sous forme de sommes de séries.
c) En déduire que S est strictement croissante sur $[0;+\infty[$ et que S est concave sur $[0;+\infty[$.

Solution :

a) Soit $x \in [0;+\infty[$ fixé. On a :

$$f_n(x) = \frac{\ln(n+x)}{n^2} = \frac{\ln n + \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{n^2} \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln n}{n^2} \geqslant 0$$

Puisque la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln n}{n^2}$ converge , par théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ converge.
On conclut : $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
b) • Pour tout $n \in \mathbb{N}^+$, f_n est de classe C^2 sur $[0;+\infty[$ et, pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$f_n'(x) = \frac{1}{(n+x)n^2}, \quad f_n''(x) = -\frac{1}{(n+x)^2 n^2}$$

- Puisque : $\forall n \in \mathbb{N}^\alpha, \|f_n''\|_\infty = \frac{1}{n^4}$, d'après l'exemple de Riemann $(4>1)$, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n''$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0;+\infty[$.
- Puisque : $\forall n \in \mathbb{N}^+, \|f_n\|_\infty = \frac{1}{n^3}$, d'après l'exemple de Riemann $(3>1)$, la série $\sum_{n\geqslant 1} f_n'$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0;+\infty[$. - On a vu en a) que $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $[0;+\infty[$.
D'après le théorème de dérivation pour les séries d'applications, on conclut que S est de classe C^2 sur $[0;+\infty[$ et que, pour tout $x \in [0;+\infty[$:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)n^2}, \quad S''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{(n+x)^2 n^2}$$

c) 1) D' après b), S est de classe C^1 sur $[\,0;+\infty[$ et, pour tout $x \in [0;+\infty\,[$, $S'(x)$ est la somme d'une série à termes tous > 0, donc $S'(x) > 0$. On conclut que S est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
2) D'après b), S est de classe C^2 sur $[0;+\infty[$, et, pour tout $x \in [0;+\infty\,[$, $S''(x)$ est la somme d'une série à termes tous $\leqslant 0$, donc $S''(x) \leqslant 0$. On conclut que S est concave sur $[0;+\infty[$.

Exercice 8

Soit $f_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, bornée, $\geqslant 0$. Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite d'applications $(f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f_{n+1}(x) = \sqrt{1 + f_n(x)}$$

Solution :

Une récurrence immédiate montre que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x)$ existe et $f_n(x) \geqslant 0$.
Considérons l'application

$$\varphi : [0;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \sqrt{1+t}$$

et cherchons les éventuels points fixes de φ.
On a, pour tout $t \in [0;+\infty[$, $\varphi(t) \geqslant 0$ et :

$$\begin{aligned} \varphi(t) = t \Longleftrightarrow 1 + t = t^2 \Longleftrightarrow t^2 - t - 1 = 0 \\ \Longleftrightarrow t = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \text{ noté } \alpha. \end{aligned}$$

Essayons de montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction constante α.
Soient $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$. On a, par utilisation d'une expression conjuguée :

$$\begin{aligned} |f_{n+1}(x) - \alpha| &= \left|\sqrt{1 + f_n(x)} - \sqrt{1+\alpha}\right| \\ &= \frac{|f_n(x) - \alpha|}{\sqrt{1+f_n(x)} + \sqrt{1+\alpha}} \leqslant \frac{1}{2}\,|f_n(x) - \alpha|\,. \end{aligned}$$

Une récurrence immédiate montre :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}\,|f_0(x) - \alpha|\,,$$

d'où : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x) - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}\,(f_0(x) + \alpha) \leqslant \frac{1}{2^n}\,(\|f_0\|_\infty + \alpha)$$

Il en résulte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est bornée et que :

$$\|f_n - \alpha\|_\infty \leqslant \frac{1}{2^n}\left(\|f_0\|_\infty + \alpha\right) \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$$

On conclut : $f_n \xrightarrow[n\infty]{C.U} \alpha$ sur $\mathbb{R}$, où α est la fonction constante égale à α.

Chapitre 3

Séries entières

Exercice 1

Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes :
a) $\sum_{n\geq 0}\frac{n^2+1}{n^3+2}z^n$ b) $\sum_{n\geqslant 0}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})z^n$ c) $\sum_{n\geq 0}\frac{2^n+n^2}{3^n-n^2}z^n$
d) $\sum_{n\geqslant 1}\frac{\ln\left(n^2+1\right)}{\ln(n^3+1)}z^n$ e) $\sum_{n\geq 0}\binom{2n}{n}z^n$ f) $\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{e}^{\sin n}z^n$.

Solution :

Notons, dans chaque exemple, a_n le coefficient de la série entière envisagée.
a) On a :

$$a_n=\frac{n^2+1}{n^3+2}\approx\frac{1}{n},$$

puis, pour tout $z\in\mathbb{C}^\phi$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right|\underset{n\infty}{\sim}\frac{n}{n+1}|z|\underset{n\infty}{\longrightarrow}|z|,$$

donc, d'après la règle de d'Alembert : $R=1$.
b) On a : $a_n=\sqrt{n+2}-\sqrt{n}=\frac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}$, puis, pour tout $z\in\mathbb{C}^\phi$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right|\underset{n\infty}{\sim}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}|z|\underset{n\infty}{\longrightarrow}|z|,$$

donc, d'après la règle de d'Alembert : $R=1$.
c) On a :

$$a_n=\frac{2^n+n^2}{3^n-n^2}\approx\frac{2^n}{3^n},$$

puis, pour tout $z\in\mathbb{C}^\phi$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| \underset{n\infty}{\sim} \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\frac{3^n}{2^n}|z| = \frac{2}{3}|z| \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}|z|,$$

donc, d'après la règle de d'Alembert : $R = \frac{3}{2}$.
d) On a :

$$a_n = \frac{\ln\left(n^2+1\right)}{\ln\left(n^3+1\right)} = \frac{2\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{3\ln n + \ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right)} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3},$$

puis, pour tout $z \in \mathbb{C}^+$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| |z| \underset{n\infty}{\longrightarrow} |z|,$$

donc, d'après la règle de d'Alembert : $R = 1$.
e) On a, pour tout $z \in \mathbb{C}^\phi$:

$$\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \binom{2n+2}{n+1}\binom{2n}{n}^{-1}|z|$$
$$= \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2}\frac{(n!)^2}{(2n)!}|z| = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}|z| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 4|z|,$$

donc, d'après la règle de d'Alembert : $R = \frac{1}{4}$.
f) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant \mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{\sin n} \leqslant \mathrm{e}^1$.
Les séries entières $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{-1}z^n$ et $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}z^n$ sont de rayon 1 (séries géométriques, ou règle de d'Alembert), donc, par théorème d'encadrement pour les rayons : $R = 1$.

Exercice 2

Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes (z : variable complexe, x : variable réelle) :
a) $\sum_{n\geq 0} n^2x^n$ b) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n+1)^2}{n}x^n$ c) $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3+n^2-1}{n+1}x^n$
d) $\sum_{n\geq 0} \left(n^2+1\right)(-1)^n x^{2n}$ e) $\sum_{n\geqslant 1} \frac{n+1}{n!}z^n$ f) $\sum_{n\geqslant 1} n^{(-1)^n}x^n$.

Solution :

a) La règle de d'Alembert montre : $R = 1$.

On a :

$$\forall x \in]-1;1[, \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

d'où, en dérivant :

$$\forall x \in]-1;1[, \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

puis, en multipliant par x :

$$\forall x \in]-1;1[, \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n} = \frac{x}{(1-x)^2} = x(1-x)^{-2}$$

puis, en dérivant : $\forall x \in]-1;1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = (1-x)^{-2} + 2x(1-x)^{-3} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

puis, en multipliant par x et en remarquant que le terme d'indice 0 est nul :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

Réponse : $R = 1$ et :

$$\forall x \in]-1;1\Big[, \quad S(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$$

b) L'utilisation d'un équivalent et la règle de d'Alembert montrent : $R = 1$. On a, pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\begin{aligned} S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n} x^n &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n + 2 + \frac{1}{n}\right) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n + 2\sum_{n=1}^{+\infty} x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \end{aligned}$$

car ces trois séries entières sont de rayon 1 . On sait :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

donc : $\forall x \in]-1;1[, \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x}$. D'autre part, en dérivant, on obtient :

$$\forall x \in]-1;1[, \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

puis, en multipliant par x :

$$\forall x \in]-1;1[, \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Enfin, on sait : $\forall x \in]-1;1[, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$. En combinant linéairement, on en déduit $S(x)$.
Réponse : $R = 1$ et :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad S(x) = \frac{3x - 2x^2}{(1-x)^2} - \ln(1-x).$$

c) L'utilisation d'un équivalent et la règle de d'Alembert montrent : $R = 1$.
On a, pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\begin{aligned} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3+n^2-1}{n+1} x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2 - \frac{1}{n+1}\right) x^n \\ &= \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n}_{\text{notée } A(x)} - \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n}_{\text{notée } B(x)}, \end{aligned}$$

car ces deux séries entières sont de rayon 1 .
On a calculé $A(x)$ dans $a)$: $\quad A(x) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3}$. D'autre part, si $x \neq 0$:

$$B(x) = \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\frac{1}{x} \ln(1-x),$$

et on a $B(0) = 1$, terme constant de la série entière définissant $B(x)$.
Réponse : $R = 1$ et pour tout $x \in]-1\,;1[$:

$$S(x) = \begin{cases} \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} + \frac{1}{x}\ln(1-x) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

d) • Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \left|\left(n^2+1\right)(-1)^n x^{2n}\right| = \left(n^2+1\right) x^{2n}$$

On a : $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2+1}{n^2+1}|x|^2 \underset{n\infty}{\longrightarrow} |x|^2$, donc, d' après la règle de d' Alembert : $R = 1$. * On a, pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\begin{aligned} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+1\right)(-1)^n x^{2n} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(n^2+1\right)\left(-x^2\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \left(-x^2\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-x^2\right)^n \end{aligned}$$

car ces deux séries entières sont de rayon 1 . D'une part, par série géométrique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-x^2\right)^n = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}$$

D'autre part, d' après l'exercice a) :

$$\forall t \in]-1;1\left[, \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 t^n = \frac{t(1+t)}{(1-t)^3}\right.$$

puis en remplaçant t par $-x^2 \in]-1;1[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \left(-x^2\right)^n = \frac{-x^2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3}$$

Réponse : $R=1$ et :

$$\forall x \in]-1;1\left[, \quad S(x) = \frac{-x^2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^3} + \frac{1}{1+x^2}\right.$$

e) · On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| &= \frac{n+2}{(n+1)!}\frac{n!}{n+1}|z| \\ &= \frac{n+2}{(n+1)^2}|z| \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n}|z| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

donc, d' après la règle de d'Alembert : $R=+\infty$.
- On a, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}S(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} z^n = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{n!} z^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}\right) z^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{(n-1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\end{aligned}$$

car ces deux séries entières sont de rayon infini

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n+1}}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = (1+z) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = (1+z)\mathrm{e}^z.$$

Réponse : $R=+\infty$ et : $\forall z \in \mathbb{C}, S(z) = (1+z)\mathrm{e}^z$.
f)On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n} \leqslant |a_n| \leqslant n$.
Comme les deux séries entières $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n} z^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} z^n$ sont de rayon 1, par théorème d'encadrement : $R=1$. - Soit $x \in]-1;1[$. Pour séparer les termes d'indices pairs, d'indices impairs, nous allons travailler sur des sommes partielles.
On a, pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{n=1}^{2N+1} n^{(-1)^n} x^n = \sum_{p=1}^{N} 2p x^{2p} + \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{2p+1} x^{2p+1}$$

Comme les trois séries entières qui interviennent sont de rayon 1 , on déduit, en faisant tendre l'entier N vers l'infini :

$$S(x)=\underbrace{\sum_{p=1}^{+\infty} 2px^{2p}}_{\text{notée } A(x)}+\underbrace{\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}}_{\text{notée } B(x)}.$$

On a, d'après la série géométrique :

$$\forall t \in]-1;1[, \sum_{n=0}^{+\infty} t^n=\frac{1}{1-t},$$

d'où, en dérivant :

$$\forall t \in]-1;1[, \sum_{n=1}^{+\infty} nt^{n-1}=\frac{1}{(1-t)^2}$$

puis, en multipliant par t :

$$\forall t \in]-1;1\left[, \sum_{n=1}^{+\infty} nt^n=\frac{t}{(1-t)^2}\right.$$

Il s'ensuit :

$$\forall x \in]-1;1\left[, \quad A(x)=2\sum_{p=1}^{+\infty} p\left(x^2\right)^p=2\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^2}\right.$$

D'autre part :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad B(x)=\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Réponse : $R=1$ et :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad S(x)=\frac{2x^2}{\left(1-x^2\right)^2}+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

Exercice 3

Pour les fonctions f des exemples suivants, où l'on donne $f(x)(x$: variable réelle), montrer que f est $\mathrm{dSE}(0)$ et calculer son $\mathrm{DSE}(0)$; préciser le rayon de convergence R. a) $\frac{x^3+2}{x^2-1}$ b) $\frac{1}{x^4-3x^2+2}$
c) $(1-x)\ln(1-x)$ d) $\ln\left(x^2-8x+15\right)$

solution

a) La fonction $f : x \longmapsto \frac{x^3+2}{x^2-1}$ est définie sur $\mathbb{R}-\{-1,1\}$, donc au moins sur $]-1;1[$, et on a, par une décomposition en éléments simples immédiate, pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= x+\tfrac{x+2}{x^2-1} = x+\tfrac{x+2}{(x-1)(x+1)} \\ &= x+\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{x-1}-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{x+1} = x-\tfrac{3}{2}\tfrac{1}{1-x}-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{1+x} \\ &= x-\tfrac{3}{2}\textstyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n-\tfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n \\ &= x+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(-1)^n\right)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \end{aligned}$$

$$\text{en notant : } a_n = \begin{cases} -\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(-1)^n & \text{si } n \neq 1 \\ 0 & \text{si } n=1 \end{cases}$$

$$\text{ou encore : } a_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n=2p+1, p \in \mathbb{N}^* \\ -2 & \text{si } n=2p, p \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{si } n=1. \end{cases}$$

Déterminons le rayon R de cette série entière. D'une part, puisque la suite $(a_n)_n$ ne converge pas vers 0 , on a : $R \leqslant 1$.
D'autre part, puisque $(a_n)_n$ est bornée, on a : $R \geqslant 1$.
On conclut : $R=1$.
b) La fonction

$$f : x \longmapsto \frac{1}{x^4-3x^2+2} = \frac{1}{(x^2-1)(x^2-2)}$$

est définie sur $\mathbb{R}-\{-\sqrt{2},-1,1,\sqrt{2}\}$, donc (au moins) sur]- $1;1$ [et on a, par une décomposition en éléments simples immédiate, pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\begin{aligned} f(x) =& \frac{1}{(x^2-1)(x^2-2)} \\ &= -\frac{1}{x^2-1}+\frac{1}{x^2-2} = \frac{1}{1-x^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(x^2)^n-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)x^{2n} \end{aligned}$$

Puisque $1-\frac{1}{2^{n+1}} \underset{n\infty}{\sim} 1$ et que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} x^{2n}$ est de rayon 1, par théorème d'équivalence, on a : $R=1$.
c) La fonction $f : x \longmapsto (1-x)\ln(1-x)$ est définie que $]-\infty;1[$, donc (au moins) sur $]-1;1[$. On a, pour tout $x \in]-1;1[$:

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)\ln(1-x) = -(1-x)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1} \\ &= -x+\sum_{n=2}^{+\infty}\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right)x^n = -x+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n-1)n}x^n \end{aligned}$$

On peut considérer que ce dernier résultat constitue la réponse à la question posée. On peut aussi se ramener précisément à une série entière :

$$\forall x \in]-1;1[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

où, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ -1 & \text{si } n = 1 \\ \frac{1}{(n-1)n} & \text{si } n \geqslant 2. \end{cases}$ Par la règle de d'Alembert : $R = 1$.

d) On a : $\quad \mathrm{X}^2 - 8\mathrm{X} + 15 = (\mathrm{X}-3)(\mathrm{X}-5)$.
La fonction $f : x \longmapsto \ln(x^2 - 8x + 15)$ est définie sur $]-\infty;3[\cup]5;+\infty[$, donc (au moins) sur] -3; 3[. On a, pour tout $x \in]-3;3[$ (en faisant attention à ne mettre des logarithmes que sur des nombres > 0) :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln((x-3)(x-5)) \\ &= \ln(3-x) + \ln(5-x) \\ &= \ln 3 + \ln\left(1 - \frac{x}{3}\right) + \ln 5 + \ln\left(1 - \frac{x}{5}\right) \\ &= \ln 15 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{x}{5}\right)^n \\ &= \ln 15 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right) x^n \end{aligned}$$

On peut considérer que ce dernier résultat constitue la réponse à la question posée. On peut aussi se ramener précisément à une série entière :

$$\forall x \in]-3;3[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

où $a_0 = \ln 15$ et $a_n = -\frac{1}{n}\left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n}\right)$ pour tout $n \geqslant 1$.
On a $|a_n| \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n3^n}$ noté b_n, et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$fixé :

$$\left|\frac{b_{n+1}x^{n+1}}{b_n x^n}\right| = \frac{n3^n}{(n+1)3^{n+1}}|x| = \frac{n}{n+1}\frac{|x|}{3} \underset{n\infty}{\longrightarrow} \frac{|x|}{3}.$$

On en déduit, d'après la règle de d'Alembert et le théorème d'équivalence : $R = 3$.

Exercice 4

Trouver

$$\lim_{n\infty} \prod_{k=0}^{n} 3^{\frac{2k}{k}}$$

solution

En notant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \prod_{k=0}^{n} 3^{\frac{k}{\pi}}$,
on a $P_n > 0$ et : $\ln P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \ln 3 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}\right) \ln 3$, donc :

$$\ln P_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2^k}{k!}\right) \ln 3 = \mathrm{e}^2 \ln 3$$

puis, par continuité de l'exponentielle :

$$P_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^{\mathrm{e}^2 \ln 3} = 3^{\mathrm{c}^2}$$

On conclut :

$$\lim_{n\infty} \prod_{k=0}^{n} 3^{\frac{2^k}{n}} = 3^{c^2}$$

Exercice 5

Soient $\sum_n a_n z^n$, une série entière, R son rayon de convergence.
Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum_n a_n^2 z^n$, $\sum_n a_n z^{2n}$.

solution

1) Notons R' le rayon de la série entière $\sum_n a_n^2 z^n$.
On a, pour tout entier n et tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\left|a_n^2 z^n\right| = \left(\left|a_n \left(|z|^{\frac{1}{2}}\right)^n\right|\right)^2$$

- Si $|z|^{\frac{1}{2}} < R$, alors $\left|a_n \left(|z|^{\frac{1}{2}}\right)^n\right| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $|a_n^2 z^n| \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, d'où : $|z| \leqslant R'$.
- Si $|z|^{\frac{1}{2}} > R$, alors la suite $\left(\left|a_n \left(|z|^{\frac{1}{2}}\right)^n\right|\right)_n$ n'est pas bornée, donc la suite $\left(|a_n^2 z^n|\right)_n$ n'est pas bornée, d'où $|z| \geqslant R'$.

On a montré :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} |z| < R^2 \Longrightarrow |z| \leqslant R' \\ |z| > R^2 \Longrightarrow |z| \geqslant R' \end{cases}$$

d'où :

$$R^2 \leqslant R' \text{ et } R^2 \geqslant R'$$

et on conclut : $R' = R^2$.

2) Notons R'' le rayon de la série entière $\sum_n a_n z^{2n}$.
On a, pour tout entier n et tout $z \in \mathbb{C}$:

$$a_n z^{2n} = a_n \left(z^2\right)^n$$

- Si $|z^2| < R$, alors $a_n \left|z^2\right|^n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, donc : $|z| \leqslant R''$.
- Si $|z^2| > R$, alors la suite $\left(a_n \left(z^2\right)^n\right)_n$ n'est pas bornée, donc la suite $\left(a_n z^{2n}\right)_n$ n'est pas bornée, d'où : $|z| \geqslant R''$.

On a montré : $\forall z \in \mathbb{C}, \begin{cases} |z| < R^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow |z| \leqslant R'' \\ |z| > R^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow |z| \geqslant R'', \end{cases}$ d'où :

$$R^{\frac{1}{2}} \leqslant R'' \text{ et } R^{\frac{1}{2}} \geqslant R''$$

et on conclut : $R'' = R^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 6

Soient $\sum_n a_n z^n$, une série entière, R son rayon de convergence.
Montrer que $R > 0$ si et seulement si la suite $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)_{n \geqslant 1}$ est majorée.

solution

1) Supposons $R > 0$.
Il existe $\rho \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \rho < R$, par exemple : $\rho = \frac{R}{2}$.
Puisque $|\rho| < R$, la suite $\left(a_n \rho^n\right)_{n \geqslant 1}$ est bornée. Il existe donc $C \in \mathbb{R}_+^+$tel que : $\forall n \geqslant 1, |a_n \rho^n| \leqslant C$, d'où :

$$\forall n \geqslant 1, |a_n|^\star \leqslant \frac{1}{\rho} C^\star.$$

Comme $C^{\frac{1}{2}} \underset{n\infty}{\longrightarrow} 1$, la suite $\left(C^{\frac{1}{2}}\right)_{n \geqslant 1}$ est bornée.
Il existe donc $D \in \mathbb{R}_+$tel que : $\forall n \geqslant 1, C^{\frac{1}{k}} \leqslant D$.
On a alors : $\forall n \geqslant 1, |a_n|^{\frac{1}{\pi}} \leqslant \frac{D}{\rho}$, ce qui montre que la suite $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)_{n \geqslant 1}$ est majorée.
2) Réciproquement, supposons que la suite $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)_{n \precsim 1}$ est majorée.
Il existe donc $M \in \mathbb{R}_+^+$tel que : $\forall n \geqslant 1, |a_n|^{\frac{1}{n}} \leqslant M$.
On a alors : $\quad \forall n \geqslant 1, |a_n| \leqslant M^n$.
Comme la série entière $\sum_{n \geqslant 1} M^n z^n$ est de rayon $\frac{1}{M}$ (série géométrique), il en résulte que la série entière $\sum_{n \geqslant 1} a_n z^n$ est de rayon $\geqslant \frac{1}{M}$, donc de rayon supérieur strictement à 0 .

Exercice 7

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+n)}$.

a) 1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_n existe.
2) Établir :

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, a_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{H}_{2n-1} - \mathrm{H}_{n-1}\right),$$

où on a noté $\mathrm{H}_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^+, \mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
On pourra utiliser : $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + \underset{n\infty}{o}(1)$, où γ est la constante d'Euler. 3) En déduire un équivalent simple de a_n lorsque l'entier n tend vers l'infini.
b) On considère la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$, où la variable x est réelle, et on note R son rayon de convergence.
1) Déterminer R.
2) Quelles sont les natures des séries numériques $\sum_{n\geqslant 1} a_n R^n, \sum_{n\geqslant 1} a_n(-R)^n$?

solution

a) 1) Pour $n \in \mathbb{N}^+$fixé, $\frac{1}{k(k+n)} \underset{k\infty}{\sim} \frac{1}{k^2} \geqslant 0$, donc, par l'exemple de Riemann ($2>1$) et le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_k \frac{1}{k(k+n)}$ converge, $a_n = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+n)}$ existe.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^+$. On a, pour tout $N \geqslant n$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k(k+n)} &= \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{N}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+n}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k+n}\right) = \frac{1}{n}\left(\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k} - \sum_{k=2n}^{N+n}\frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(\left(\mathrm{H}_N - \mathrm{H}_{n-1}\right) - \left(\mathrm{H}_{N+n} - \mathrm{H}_{2n-1}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\Big[\Big(\big(\ln N + \gamma + \underset{N\infty}{o}(1)\big) - \mathrm{H}_{n-1}\Big) \\
&\quad - \left(\left(\ln(N+n) + \gamma + o(1)\right) - \mathrm{H}_{2n-1}\right) \\
&= \frac{1}{n}\ln\frac{N}{N+n} + \frac{1}{n}\left(\mathrm{H}_{2n-1} - \mathrm{H}_{n-1}\right) + \frac{1}{n}o(1).
\end{aligned}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé, en faisant tendre l'entier N vers l'infini, on obtient :

$$a_n = \sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{k(k+n)} = \frac{1}{n}\left(\mathrm{H}_{2n-1} - \mathrm{H}_{n-1}\right).$$

3) On a donc : $a_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{H}_{2n-1} - \mathrm{H}_{n-1}\right)$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{n}\left(\left(\ln(2n-1) + \gamma + \underset{n\infty}{o}(1)\right) - \left(\ln(n-1) + \gamma + o(1)\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\ln\frac{2n-1}{n-1} + o\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\ln(2+o(1)) + o\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}.
\end{aligned}$$

b) 1) Puisque $a_n \simeq \frac{\ln 2}{n}$, et que la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ est de rayon 1 , par théorème d'équivalence, le rayon R de la série entière $\sum_{n\geqslant 1} a_n x^n$ est : $R = 1$.
2) - Nature de la série de terme général $a_n R^n$:

On a : $a_n R^n = a_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}$, donc, d'après l'exemple de Riemann et le théorème d'équivalence pour des séries à termes $\geqslant 0$, la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n R^n$ diverge. - Nature de la série de terme général $a_n(-R)^n$:

Il s'agit de la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n a_n$, puisque $R = 1$. Cette série est alternée, et $a_n \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$, car $a_n \underset{n\infty}{\sim} \frac{\ln 2}{n}$. On a, pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+n+1)} \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+n)} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k(k+n)} = a_n, \end{aligned}$$

donc $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
D'après le TSCSA, on conclut que la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n a_n$ converge.
Finalement, la série $\sum_{n\geqslant 1} a_n(-R)^n$ converge.

Chapitre 4

Séries de Fourier

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, 2\pi$-périodique, paire, telle que, pour tout $t \in [0;\pi]$:

$$f(t) = 1 \text{ si } 0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}, \quad f(t) = 0 \text{ si } t = \frac{\pi}{2}, \quad f(t) = -1 \text{ si } \frac{\pi}{2} < t \leqslant \pi.$$

a) Vérifier $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f.
b) Étudier les convergences de la série de Fourier de f et préciser sa somme.
c) En déduire les sommes de séries suivantes : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(1)^p}{2p+1}, \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

solution

Il est clair que f est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ donc $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, et les coefficients de Fourier (trigonométriques) $a_n, b_n (n \in \mathbb{N})$ de f existent.
Puisque f est paire, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^+, b_n = 0$.
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la parité de f :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos nt \,\mathrm{d}t - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos nt \,\mathrm{d}t \right) \end{aligned}$$

On a donc $a_0 = 0$, et, pour tout $n \geqslant 1$:

$$a_n = \frac{2}{\pi n} \left([\sin nt]_0^{\pi/2} - [\sin nt]_{\pi/2}^{\pi} \right) = \frac{4}{\pi n} \sin \left(n \frac{\pi}{2} \right).$$

On a donc, pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$a_{2p} = 0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)}$$

b) Puisque f est 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux, d'après le théorème de Dirichlet de convergence simple, la série de Fourier de f converge simplement sur $\mathbb{R}$ et a pour somme la régularisée $\widetilde{f}$ de f.
On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2}\left(f\left(t^+\right) + f\left(t^-\right)\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)} \cos(2p+1)t$$

c) - En remplaçant t par 0 dans le résultat de b), on obtient :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)} = 1, \text{ donc } : \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}$$

- Puisque $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, d'après la formule de Parseval réelle, on a :

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 \, \mathrm{d}t$$

c'est-à-dire ici : $\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(2p+1)^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{d}t = 1$, d'où : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
- Soit $N \in \mathbb{N}$. On a, en séparant les termes d'indices pairs, d'indices impairs :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

D'où, en faisant tendre l'entier N vers l'infini, et puisque les séries qui interviennent convergent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

Réponse :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{2p+1} = \frac{\pi}{4}, \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-périodique, impaire, telle que :

$$f(t) = t \text{ si } 0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}, \quad f(t) = \pi - t \text{ si } \frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \pi.$$

a) Vérifier $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f.
b) Étudier les convergences de la série de Fourier de f et préciser sa somme.
c) En déduire les sommes de séries suivantes :

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$$

solution

Il est clair que f est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ (et même, continue sur $\mathbb{R}$), donc $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$ et les coefficients de Fourier (trigonométriques) $a_n, b_n, (n \in \mathbb{N})$ de f existent.
Puisque f est impaire, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^+$, en utilisant l'imparité de f :

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} t \sin nt \,\mathrm{d}t + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t) \sin nt \,\mathrm{d}t \right) \\
u &= \overline{\overline{\pi}} - t \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} t \sin nt \,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} u \sin(n\pi - nu) \mathrm{d}u \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} t \sin nt \,\mathrm{d}t - (-1)^n \int_0^{\pi/2} u \sin nu \,\mathrm{d}u \right) \\
&= \frac{2}{\pi} \left(1 + (-1)^n\right) \int_0^{\pi/2} t \sin nt \,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Il s'ensuit : $\forall p \in \mathbb{N}^+, b_{2p} = 0$, et, pour tout $p \in \mathbb{N}$, grâce à une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
b_{2p+1} &= \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} t \sin(2p+1)t \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{\pi} \left(\left[-t \frac{\sin(2p+1)t}{2p+1} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2p+1)t}{2p+1} \,\mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{4}{\pi} \left[\frac{\sin(2p+1)t}{2p+1} \right]_0^{\pi/2} = \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)^2}
\end{aligned}$$

b) Puisque f est 2π-périodique, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de Dirichlet de convergence normale, la série de Fourier de f converge normalement (donc uniformément, absolument, simplement) sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f. On a donc :
$\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{4(-1)^p}{\pi(2p+1)^2} \sin(2p+1)t$. Remarque : La convergence normale résulte aussi de :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \left| \frac{4(-1)^p}{(2p+1)^2} \sin(2p+1)t \right| \leqslant \frac{4}{\pi(2p+1)^2}$$

et de la convergence de la série numérique $\sum_{p \geqslant 0} \frac{1}{(2p+1)^2}$. c) • En remplaçant t par $\frac{\pi}{2}$ dans le résultat de b), on obtient : donc : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$.
- On a, pour tout $N \in \mathbb{N}^\star$, en séparant les termes d'indices pairs, d'indices impairs :

$$\sum_{n=1}^{2N+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{(2p)^2} + \sum_{p=0}^{N} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

D'où, en faisant tendre l'entier N vers l'infini, et puisque les séries qui interviennent convergent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}\sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p^2} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2}$$

d'où : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{4}{3}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$. - Puisque $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$, on a, d'après la formule de Parseval réelle :

$$\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 \,\mathrm{d}t,$$

c'est-à-dire ici :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{16}{\pi^2(2p+1)^4} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (f(t))^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} t^2 \,\mathrm{d}t - \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)^2 \,\mathrm{d}t\right) \\
&\overset{u=\pi-t}{=} \pi \quad \left(\int_0^{\pi/2} t^2 \,\mathrm{d}t + \int_0^{\pi/2} u^2 \,\mathrm{d}u\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} t^2 \,\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

d'où : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{2\pi^2}{16}\frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^4}{96}$. - Comme en 1), en séparant les termes d'indices pairs, d'indices impairs et puisque les séries qui interviennent convergent, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{(2p)^4} + \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4}$$

donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}}\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{16}{15}\frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}$$

Réponse : $\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto |\sin t|$.
a) Vérifier $f \in \mathcal{CM}_\pi$ et calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f.
b) Étudier les convergences de la série de Fourier de f et préciser sa somme.
c) En déduire les sommes de séries suivantes : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2-1}, \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(4n^2-1)^2}$.

solution

L'application $f : t \longmapsto |\sin t|$ est π-périodique et continue par morceaux (car continue), donc $f \in \mathcal{CM}_\pi$, et les coefficients de Fourier (trigonométriques) $a_n, b_n (n \in \mathbb{N})$ de f existent.
Comme f est paire, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^+, b_n = 0$.
On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos 2nt \, \mathrm{d}t = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin t \cos 2nt \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(2n+1)t - \sin(2n-1)t) \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1} + \frac{\cos(2n-1)t}{2n-1} \right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right) = -\frac{4}{\pi (4n^2-1)}
\end{aligned}$$

On conclut : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_n = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)} \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = 0. \end{cases}$

b) L'application f est π-périodique, de classe C^1 par morceaux sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}$, donc, d'après le théorème de Dirichlet de convergence normale, la série de Fourier de f converge normalement, donc uniformément, absolument, simplement, sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f. D'où :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\sin t| &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos 2nt + b_n \sin 2nt) \\
&= \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi (4n^2-1)} \cos 2nt
\end{aligned}$$

c) - En remplaçant t par 0 dans le résultat de b), on obtient :

$$0 = \frac{2}{\pi} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4}{\pi (4n^2-1)}$$

d'où :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$$

- En remplaçant t par $\frac{\pi}{2}$ dans le résultat de b), on obtient :

$$1=\frac{2}{\pi}-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4}{\pi\left(4n^2-1\right)}(-1)^n$$

d'où : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}=\frac{\pi}{4}\left(\frac{2}{\pi}-1\right)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$.
- Puisque $f\in\mathcal{CM}_\pi$, d'après la formule de Parseval réelle :

$$\frac{a_0^2}{4}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi(f(t))^2\,\mathrm{d}t$$

c'est-à-dire ici :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16}{\pi^2\left(4n^2-1\right)^2}&=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\sin^2 t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi(1-\cos 2nt)\mathrm{d}t=\frac{1}{2\pi}\left[t-\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^\pi=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

et on conclut :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(4n^2-1\right)^2}=\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi^2}\right)=\frac{\pi^2-2}{16}$$

Réponse : $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4n^2-1}=\frac{1}{2},\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{4n^2-1}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\left(4n^2-1\right)^2}=\frac{\pi^2-2}{16}$$

Exercice 4

Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R},2\pi$-périodique, impaire, telle que : $\forall t\in[0;\pi],f(t)=t(\pi-t)$.
a) Vérifier $f\in\mathcal{CM}_{2\pi}$ et calculer les coefficients de Fourier (trigonométriques) de f.
b) Étudier les convergences de la série de Fourier de f et préciser sa somme.
c) En déduire les sommes de séries : $\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3},\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^6},\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}$.

solution

a) Il est clair que f est 2π-périodique (par définition) et continue par morceaux (et même continue) sur $\mathbb{R}$, donc les coefficients de Fourier (trigonométriques) $a_n,b_n(n\in\mathbb{N})$ de f existent
De plus, f est impaire, donc : $\forall n\in\mathbb{N},a_n=0$.
On a, pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{2\pi}\int_{[2\pi]} f(t)\sin nt\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t(\pi - t)\sin nt\ \mathrm{d}t \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\left[-t(\pi-t)\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\pi+2t)\frac{\cos nt}{n}\ \mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}(2t-\pi)\cos nt\ \mathrm{d}t \\
&= -\frac{2}{\pi n}\left(\left[(2t-\pi)\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2\frac{\sin nt}{n}\ \mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\sin nt\ \mathrm{d}t = -\frac{4}{\pi n^2}\left[\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{4\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^3}
\end{aligned}$$

On conclut : $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, a_n = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, b_n = \frac{4(1-(-1)^n)}{\pi n^3}. \end{cases}$ b) Puisque f est 2π-périodique et de classe C^1 par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$ (et même de classe C^1 sur $\mathbb{R}$), d'après le théorème de convergence normale de Dirichlet, la série de Fourier de f converge normalement, donc uniformément, absolument, simplement, sur $\mathbb{R}$ et a pour somme f. On a donc :

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n\cos nt + b_n \sin nt\right) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^3}\sin nt
\end{aligned}$$

En particulier :

$$\forall t \in [0;\pi], \quad t(\pi - t) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^3}\sin nt$$

c) 1) En remplaçant t par $\frac{\pi}{2}$ dans le résultat de b), on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\pi^2}{4} &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{4\left(1-(-1)^n\right)}{\pi n^3}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right) \\
&= \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{8}{\pi(2p+1)^3}\sin\left((2p+1)\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}\frac{8(-1)^p}{\pi(2p+1)^3}
\end{aligned}$$

car les termes d'indices pairs sont tous nuls, d'où :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}$$

2) Puisque f est 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, on a, d' après la formule de Parseval :

$$\underbrace{\frac{a_0^2}{4}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)}_{\text{noté PM}}=\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{[2\pi]}(f(t))^2\,\mathrm{d}t}_{\text{noté SM}}.$$

Ici :

$$\mathrm{PM}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{16\left(1-(-1)^n\right)^2}{\pi^2 n^6}=\frac{32}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^6}$$

car les termes d'indices pairs sont tous nuls, et :

$$\begin{aligned}\mathrm{SM}&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t))^2\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(t(\pi-t))^2\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(t^4-2\pi t^3+t^2\pi^2\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\left[\frac{t^5}{5}-2\pi\frac{t^4}{4}+\pi^2\frac{t^3}{3}\right]_0^{\pi}\\&=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^5}{5}-2\pi\frac{\pi^4}{4}+\pi^2\frac{\pi^3}{3}\right)=\pi^4\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi^4}{30}\end{aligned}$$

On a donc : $\frac{32}{\pi^2}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^6}=\frac{\pi^4}{30}$, d'où :

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^6}=\frac{\pi^6}{960}$$

3) On a, pour tout $N\in\mathbb{N}$, en séparant les termes d'indices pairs, d'indices impairs :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{2N+1}\frac{1}{n^6}=\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{(2p)^6}+\sum_{p=0}^{N}\frac{1}{(2p+1)^6}\\=\frac{1}{2^6}\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p^6}+\sum_{p=0}^{N}\frac{1}{(2p+1)^6}\end{aligned}$$

d'où, en faisant tendre l'entier N vers l'infini, et puisque les séries qui interviennent convergent :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{1}{2^6}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^6}$$

et donc :

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^6}=\frac{1}{1-\frac{1}{2^6}}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^6}=\frac{64}{63}\frac{\pi^6}{960}=\frac{\pi^6}{945}$$

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{(2p+1)^3}=\frac{\pi^3}{32},$$

$$\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^6}=\frac{\pi^6}{960},$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$